

Rekonstruksi Integrasi Numerik Metode Pias Segitiga

Vincent Limanto¹, Yudhi², Bayu Prihandono³

^{1,2,3}Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Tanjungpura
Email: h1011201040@student.untan.ac.id

Abstrak

Penyelesaian masalah integrasi numerik umumnya dapat diselesaikan dengan menggunakan metode pias. Namun, metode pias yang umumnya dikenal seperti metode pias trapesium, segi empat, dan titik tengah hanya berlaku untuk koordinat Kartesius. Oleh karena itu, penelitian ini mengembangkan metode pias yang dapat digunakan untuk integrasi numerik pada koordinat polar, khususnya bangun datar segitiga. Penelitian ini juga menganalisis galat dari hasil metode pias segitiga dan memberikan contoh serta visualisasi penerapan metode pias segitiga dalam menyelesaikan masalah integrasi numerik. Langkah-langkah penelitian ini adalah pertama, menentukan bentuk integral pada masalah integrasi numerik di koordinat polar. Kemudian, luas daerah yang dibatasi kurva dibagi menjadi beberapa bagian yang masing-masing dihampiri dengan segitiga. Selanjutnya, dibuat rumus integrasi numerik metode pias segitiga dengan menjumlahkan luas masing-masing segitiga. Setelah itu, menganalisis galat hasil metode pias segitiga dengan deret Taylor. Akhirnya, dibuktikan bahwa hasil metode pias segitiga menghampiri luas daerah dibatasi kurva pada koordinat polar. Dari penelitian ini didapatkan rumus integrasi numerik metode pias segitiga, rumus galat dengan orde penghampiran berderajat dua, dan berdasarkan pembuktian rumus integrasi numerik metode pias segitiga, disimpulkan bahwa ketika jumlah segitiga mendekati tak hingga, hasil metode pias segitiga akan konvergen ke solusi eksak luas daerah yang dibatasi oleh kurva pada koordinat polar.

Kata kunci: deret Taylor; orde penghampiran; koordinat polar

Abstract

The solution to numerical integration problems generally can be achieved using mesh methods. However, mesh methods, commonly known as trapezoidal, rectangular, and midpoint, only apply to Cartesian coordinates. Therefore, this research develops a mesh method that can be used for numerical integration in polar coordinates, specifically using Triangle shapes. This study also analyzes the errors from the results of the Triangle mesh method and provides examples and visualizations of applying the Triangle mesh method to solve numerical integration problems. The steps of this research are as follows: first, determining the form of the integral in the problem of numerical integration in polar coordinates. Then, the area bounded by the curve is divided into several parts, each approximated by a triangle. Next, a numerical integration formula of the triangle mesh method is created by summing the areas of each triangle. After that, the resulting error of the triangle mesh method is analyzed using the Taylor series. Finally, proving that the results of the triangle mesh method approximate the area bounded by the curve in polar coordinates. From this research, the numerical integration formula for the Triangle mesh method is obtained, the error formula with a second-order approximation degree, and based on the proof of the numerical integration formula for the Triangle mesh method, it is concluded that as the number of triangles approaches infinity, the results of the Triangle mesh method will converge to the exact area bounded by the curve.

Keywords: Taylor series, order approximation, polar coordinates

A. Pendahuluan

Perkembangan teknologi telah memberikan dampak besar pada kehidupan manusia. Penggunaan komputer secara luas telah mempercepat perkembangan metode pendekatan dalam menyelesaikan masalah. Banyak permasalahan dapat dimodelkan sebagai persamaan integral, namun terkadang persamaan tersebut terlalu kompleks sehingga sulit diselesaikan secara analitik dengan menggunakan kalkulus konvensional. Oleh karena itu, diperlukan bantuan komputer serta metode pendekatan yang tepat agar persamaan dapat diselesaikan dengan efisien dan akurat. Salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk menangani persamaan yang rumit adalah metode numerik.

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah yang diformulasikan secara matematis dengan menggunakan operasi aritmetika seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian (Putri & Wartono, 2020). Meskipun solusi yang dihasilkan metode ini tidak selalu sama dengan solusi asli, tingkat keakuratannya dapat dikendalikan dengan mengurangi galat (Zein, Rasimeng, & Dani, 2022). Metode numerik umumnya melibatkan perhitungan yang dilakukan secara berulang-ulang, sehingga diperlukan bantuan program komputer untuk melakukan operasi tersebut (Utomo, 2021; Triatmodjo, 2002). Salah satu cabang metode numerik adalah integrasi numerik.

Integrasi numerik merupakan metode numerik yang digunakan untuk mendapatkan nilai hampiran dari integral tentu yang memerlukan penyelesaian secara numerik (Bradie, 2016; Maure & Mungkasi, 2021; Suciety et al., 2023). Terdapat tiga kelompok utama dalam metode integrasi numerik, yaitu metode pias, metode Newton-Cotes, dan metode kuadratur Gauss (Jayan & Kallur, 2015) (Biswas, Moi, & Sarkar, 2022). Metode pias mencakup metode trapesium, metode persegi panjang, dan metode titik tengah (Wu & Martinsson, 2021; Trefethen & Weideman, 2014; Meiliana et al., 2024). Metode Newton-Cotes meliputi metode trapesium, metode Simpson, dan metode Boole (Ansar et al., 2021; Mulyono et al., 2022; Erma & Alwi, 2017; Ermawati et al., 2017). Sedangkan Metode Gauss mencakup Gauss-Legendre dengan 2 titik, 3 titik, hingga n titik (Villarino, 2020; Darmawan, 2016).

Integrasi numerik metode pias yang disebutkan umumnya terbatas pada koordinat Kartesius. Oleh karena itu, muncul ide untuk mengembangkan metode pias yang dapat digunakan pada koordinat polar (Utari, Septy, & Hutaaruk, 2021). Konsep metode pias membagi interval θ pada masalah integrasi luas daerah yang dibatasi oleh kurva dalam koordinat polar menjadi beberapa bagian interval θ (Pandu, 2019; Apushkinskiy et al., 2023). Bangun datar yang paling sesuai untuk menghampiri luas daerah tiap interval bagian adalah segitiga. Tujuan penelitian ini mengonstruksi rumus integrasi numerik metode pias segitiga, menganalisis galat dari hasil metode pias segitiga, memberikan contoh dan

visualisasi penerapan metode pias segitiga dalam menyelesaikan masalah integrasi numerik. Metode pias segitiga ini hanya untuk menyelesaikan masalah integrasi luas daerah yang dibatasi oleh kurva pada koordinat polar, dengan syarat fungsi tersebut kontinu dan terbatas pada interval $\theta [a, b]$.

Penelitian ini mengkaji integrasi numerik metode pias segitiga pada koordinat polar melalui sistem kajian pustaka. Buku karya Munir (2015), yang membahas tentang metode numerik khususnya terkait dengan integrasi numerik, deret Taylor, dan analisis galat penghampiran. Buku karya Purcell & Varberg (1998), yang membahas mengenai kalkulus salah satunya konsep dan sifat-sifat integral tentu. Buku karya Stewart (2003), yang membahas sistem koordinat polar dan bentuk integral untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva pada koordinat polar, yang merupakan objek penghampiran metode pias segitiga. Diberikan teori-teori yang melandasi penelitian ini.

Galat

Galat adalah besarnya selisih antara nilai taksiran dengan nilai sesungguhnya. Diberikan rumus galat (Silpia & Syamsudhuha, 2014).

i. Galat

$$\varepsilon = a - \hat{a}$$

ii. Galat mutlak

$$|\varepsilon| = |a - \hat{a}|$$

iii. Galat relatif sejati

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a}$$

iv. Galat relatif hampiran

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{\hat{a}}$$

Dengan :

ε : galat

a : nilai sesungguhnya

$\hat{a}$: nilai taksiran

Deret Taylor

Definisi 1 (Munir, 2015) Misalkan f dan semua turunannya, f', f'', f''' , dan seterusnya, kontinu di dalam interval $[a, b]$. Jika $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai-nilai x di sekitar x_0 dan $x \in [a, b]$, $f(x)$ dapat diperluas ke dalam deret

$$\text{Taylor } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Orde Penghampiran

Misalkan fungsi $f(h)$ didekati dengan fungsi $p(h)$. Jika $|f(h) - p(h)| \leq M|h^n|$, di mana M adalah konstanta real > 0 , maka $p(h)$ dianggap mendekati $f(h)$ dengan orde pendekatan $O(h^n)$ dan ditulis sebagai $f(h) = p(h) + O(h^n)$ (Diethelm, 2014) (Javed & Trefethen, 2014) (Jones, 2017) (Nurhaliza & Zulfah, 2021).

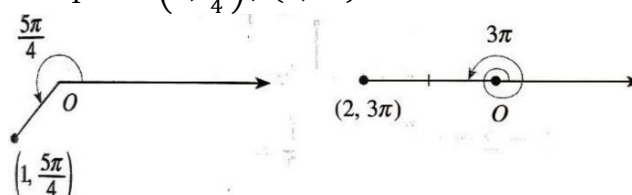
Metode Pias

Metode pias adalah metode integrasi numerik yang berbasis pias. Lebar tiap pias adalah $h = \frac{b-a}{n}$. Titik absis pias dinyatakan sebagai $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Nilai fungsi pada titik absis pias adalah $f_i = f(x_i)$.

Pada penelitian ini, digunakan sistem koordinat polar. Diberikan contoh dan penjelasan mengenai sistem koordinat polar.

Jika P adalah titik sebarang dibidang, misalkan r adalah jarak dari O ke P dan θ adalah sudut antara sumbu polar dan garis OP . Maka titik P dinyatakan sebagai pasangan (r, θ) dimana r, θ disebut koordinat polar dari P . Dengan sudut positif jika diukur berlawanan arah jarum jam dari sumbu polar dan sudut negatif jika diukur searah jarum jam dari sumbu polar.

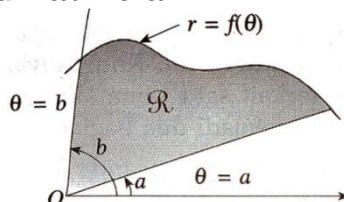
Contoh 2 Koordinat polar $(1, \frac{5\pi}{4}), (2, 3\pi)$.



Gambar 1. Koordinat polar $(1, \frac{5\pi}{4}), (2, 3\pi)$ (Purcell & Varberg, 1998)

Berdasarkan Gambar 1, koordinat polar $(1, \frac{5\pi}{4})$ menunjukkan sebuah titik yang berjarak 1 dari asal dengan sudut $\frac{5\pi}{4}$ dari sumbu polar. Sementara itu, koordinat polar $(2, 3\pi)$ menunjukkan sebuah titik yang berjarak 2 dari asal dengan sudut 3π dari sumbu polar.

Luas Daerah pada Koordinat Polar



Gambar 2. Luas daerah dibatasi $r = f(\theta)$

(Stewart, 2003) Rumus luas daerah pada koordinat polar $\int_a^b \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta$. (1)

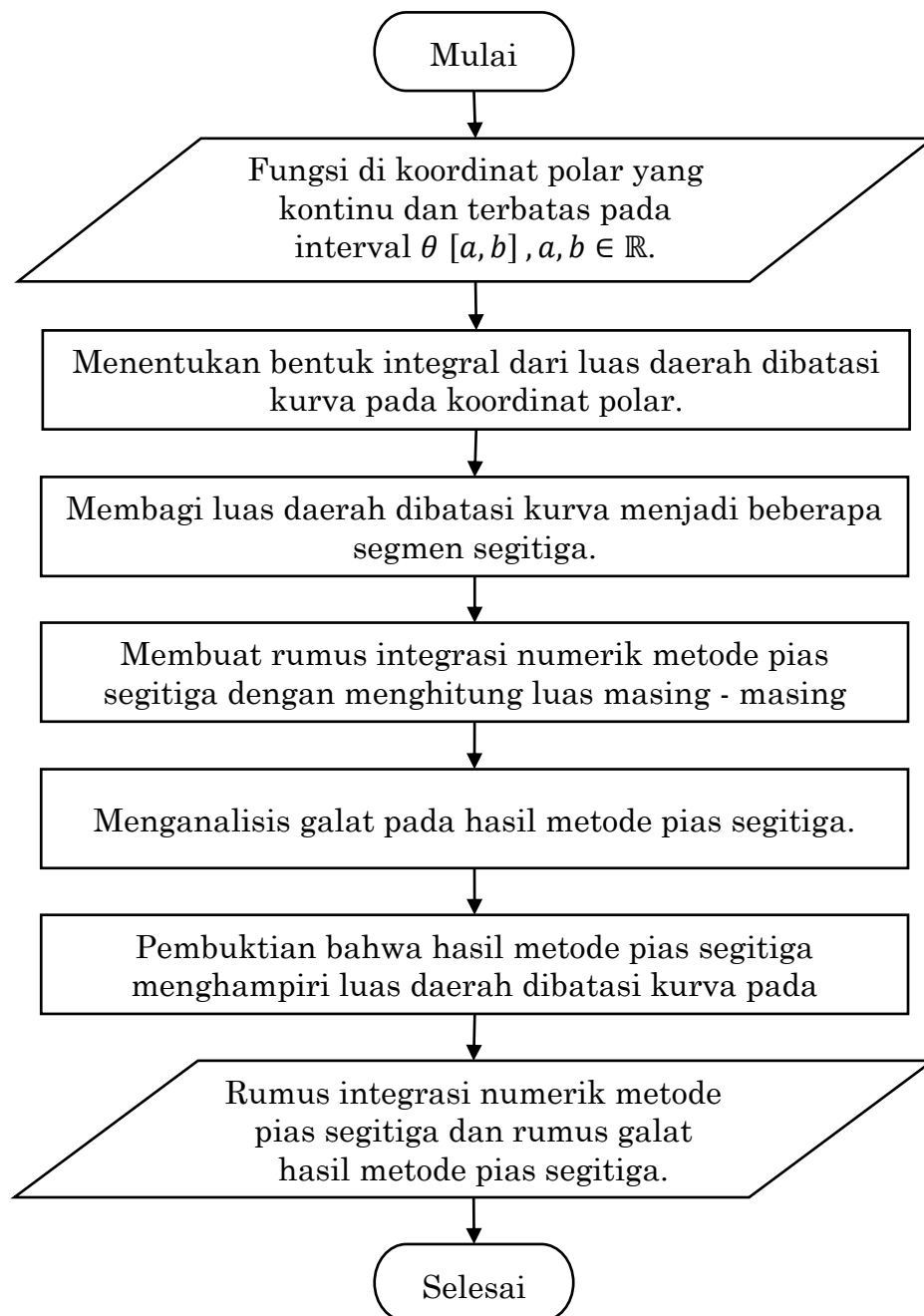
Transformasi Integral Lipat Dua Koordinat Kartesius ke Koordinat Polar

Teorema 3 (Stewart, 2003) $\iint_{D_1} f(x, y) dy dx = \iint_{D_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$.

B. Metode Penelitian

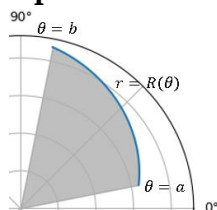
Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka dengan membaca literatur yang berhubungan dengan integrasi numerik, kalkulus integral, dan koordinat polar. Literatur tersebut bersumber dari buku dan jurnal. Secara umum, langkah-langkah untuk mengonstruksi integrasi numerik menggunakan metode pias segitiga pada koordinat polar adalah sebagai berikut: Pertama, menentukan bentuk integral yang akan digunakan dalam masalah integrasi numerik pada koordinat polar. Kedua, membagi luas

daerah yang dibatasi oleh kurva menjadi beberapa bagian dan mendekatinya dengan luas segitiga. Ketiga, mengonstruksi rumus integrasi numerik metode pias segitiga dengan menjumlahkan luas tiap segitiga. Keempat, analisis galat dari hasil metode pias segitiga. Kelima, membuktikan bahwa hasil metode pias segitiga menghampiri luas daerah yang dibatasi kurva pada koordinat polar. Terakhir, diberikan contoh penerapan dan visualisasi metode pias segitiga dalam menyelesaikan masalah integrasi numerik.



C. Hasil dan Pembahasan

Bentuk Integral Luas Daerah pada Koordinat Polar



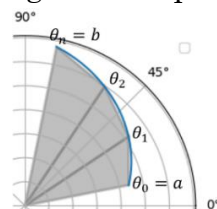
Gambar 3. Luas daerah yang dibatasi kurva $R(\theta)$

Berdasarkan Persamaan 1 diperoleh bentuk integral luas daerah yang dibatasi kurva $R(\theta)$ $\int_a^b \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta$. (2)

Setelah mendapatkan $\int_a^b \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta$, selanjutnya hampiri integral ini secara numerik dengan metode pias.

Metode Pias Segitiga

Metode pias segitiga adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah integrasi numerik pada koordinat polar khususnya masalah luas daerah dengan menggunakan segitiga sebagai partisinya. Dengan Gambar 4, bagi luas daerah interval $[a, b]$ menjadi beberapa bagian luas daerah dengan titik ujung $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ dan lebar $\Delta\theta$ yang sama. Hampiri luas daerah tiap interval dengan segitiga, $R(\theta_{i-1})$ dan $R(\theta_i)$ sebagai panjang sisi segitiga dan $\Delta\theta$ sebagai sudut pusat seperti pada Gambar 5.



Gambar 4. Partisi Pias Segitiga

$$\Delta\theta = h = \frac{b-a}{n}.$$

Luas daerah interval $[\theta_0, \theta_1]$ dihamperi oleh satu segitiga sehingga rumusnya

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta \approx \frac{\sin h}{2} R_0 R_1.$$

Jika daerah $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, maka rumus segitiganya

$$\int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta \approx \frac{\sin h}{2} R_{i-1} R_i. \quad (3)$$

Dengan sifat penambahan interval, maka diperoleh

$$\int_a^b \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta + \dots + \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta. \quad (4)$$

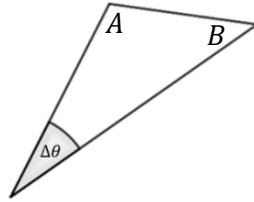
Substitusi Persamaan 3 ke Persamaan 4

$$\int_a^b \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta \approx \frac{\sin h}{2} (R_0 R_1 + R_1 R_2 + \dots + R_{n-1} R_n) = \frac{\sin h}{2} \sum_{k=1}^n R_{k-1} R_k.$$

Jadi didapat rumus metode pias segitiga $\int_a^b \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta \approx \frac{\sin h}{2} \sum_{k=1}^n R_{k-1} R_k$.

Aturan dalam Metode Pias Segitiga

Karena jumlah sudut dalam segitiga adalah 180° dan ketiga sudut lebih besar dari 0° , maka dibuatlah aturan agar sudut pusat segitiga tidak melebihi 180° . $[a, b]$ merupakan interval θ dari integral yang dihamperi.



Gambar 5. Segitiga sembarang dengan sudut $\Delta\theta, A, B$

$\Delta\theta < \pi$ (Sudut pusat segitiga kurang dari 180° .)

$\frac{b-a}{n} < \pi$ ($\Delta\theta = \frac{b-a}{n}$.)

$n > \frac{b-a}{\pi}$ (kedua ruas dikali $\frac{n}{\pi}$.)

Min $n = \left\lceil \frac{b-a}{\pi} \right\rceil + 1$ (n bilangan bulat positif.)

Jadi minimal jumlah segitiga pada metode pias segitiga adalah $\left\lceil \frac{b-a}{\pi} \right\rceil + 1$.

Analisis Galat Metode Pias Segitiga

Akan dianalisis galat pada satu pias segitiga.

$$\varepsilon_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta - \frac{R_0 R_1 \sin h}{2}. \quad (5)$$

Hampiri $R(\theta)$ dan R_1 dengan deret Taylor disekitar $\theta = \theta_0$.

$$R(\theta) = R_0 + \frac{(\theta - \theta_0)}{1!} R'_0 + \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2!} R''_0 + \dots \quad (6)$$

$$R_1 = R_0 + \frac{h}{1!} R'_0 + \frac{h^2}{2!} R''_0 + \dots \quad (7)$$

Hampiri $\sin h$ dengan deret Taylor disekitar $\theta = 0$.

$$\sin h = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \frac{h^7}{7!} + \dots \quad (8)$$

Jabarkan fungsi $(R(\theta))^2$

$$(R(\theta))^2 = (R_0)^2 + 2(\theta - \theta_0)R'_0 R_0 + (\theta - \theta_0)^2 R''_0 R_0 + (\theta - \theta_0)^2 R'^2_0 + \dots \quad (9)$$

Substitusi persamaan 9 ke persamaan 5 dan integrasikan.

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{2} ((R_0)^2 + 2(\theta - \theta_0)R'_0 R_0 + (\theta - \theta_0)^2 R''_0 R_0 + (\theta - \theta_0)^2 R'^2_0 + \dots) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[h(R_0)^2 + h^2 R'_0 R_0 + \frac{h^3}{3} R''_0 R_0 + \frac{h^3}{3} R'^2_0 + \dots \right]. \quad (10)$$

Substitusi Persamaan 7, 8, 10 ke Persamaan 5.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left[h(R_0)^2 + h^2 R'_0 R_0 + \frac{h^3}{3} R''_0 R_0 + \frac{h^3}{3} R'^2_0 + \dots \right]$$

$$- \frac{R_0 \left(R_0 + \frac{h}{1!} R'_0 + \frac{h^2}{2!} R''_0 + \dots \right) \left(h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \frac{h^7}{7!} + \dots \right)}{2}.$$

Sederhanakan dan abaikan $h^n, n > 3$ karena dalam analisis galat hanya melihat h derajat terkecil.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{h^3}{3} R''_0 R_0 - \frac{h^3}{2} R''_0 R_0 + \frac{h^3}{6} R^2_0 + \frac{h^3}{3} R'^2_0 \right) + \dots$$

$$= \frac{1}{12} h^3 [R(t)^2 + 2R'(t)^2 - R''(t)R(t)] = O(h^3), \quad \theta_0 \leq t \leq \theta_1.$$

Didapat rumus galat untuk interval $[\theta_0, \theta_1]$ dengan orde penghampiran $O(h^3)$, kemudian dicari rumus untuk galat total.

$$\varepsilon_s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{12} h^3 \sum_{k=1}^n [R(c)^2 + 2R'(c)^2 - R''(c)R(c)], \quad a \leq c \leq b.$$

Karena $R(c), R'(c), R''(c)$ adalah konstanta, maka dengan sifat notasi sigma diperoleh

$$\varepsilon_s = \frac{1}{12} n h^3 [R(c)^2 + 2R'(c)^2 - R''(c)R(c)], \quad a \leq c \leq b.$$

$$\text{Substitusi } h = \frac{b-a}{n}.$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{12} (b-a) h^2 [R(c)^2 + 2R'(c)^2 - R''(c)R(c)] = O(h^2), \quad a \leq c \leq b.$$

Jadi didapatlah rumus galat total dengan orde penghampiran $O(h^2)$.

$$\varepsilon_s = \frac{1}{12} (b-a) h^2 [R(c)^2 + 2R'(c)^2 - R''(c)R(c)], \quad a \leq c \leq b.$$

Pembuktian Rumus Metode Pias Segitiga dengan Rumus Galat

Galat antara nilai eksak luas daerah yang dibatasi kurva pada koordinat polar dan hasil integrasi numerik metode pias segitiga dinyatakan sebagai berikut.

$$\int_a^b \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta = \frac{\sin h}{2} \sum_{k=1}^n R_{k-1} R_k + \varepsilon_s.$$

Jika hasil metode pias segitiga menghampiri luas daerah yang dibatasi kurva saat $n \rightarrow \infty$, maka didapat persamaan sebagai berikut.

$$\int_a^b \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin h}{2} \sum_{k=1}^n R_{k-1} R_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_s. \quad (11)$$

Untuk menganalisis limit ε_s saat $n \rightarrow \infty$, sebelum itu analisis h .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} = 0.$$

karena $h \rightarrow 0$, maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_s = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{12} (b-a) h^2 [R(c)^2 + 2R'(c)^2 - R(c)R''(c)] = 0. \quad (12)$$

Substitusi persamaan 12 ke persamaan 11.

$$\int_a^b \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin h}{2} \sum_{k=1}^n R_{k-1} R_k + 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin h}{2} \sum_{k=1}^n R_{k-1} R_k. \quad \blacksquare$$

Terbukti saat $n \rightarrow \infty$ hasil metode pias segitiga konvergen ke nilai eksak luas daerah yang dibatasi kurva pada koordinat polar.

Metode Pias Segitiga untuk Masalah Integrasi Numerik pada Koordinat Kartesius

Metode pias segitiga juga dapat menyelesaikan masalah integrasi numerik pada koordinat Kartesius namun masalah integrasi numerik harus ditransformasi ke koordinat polar terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \int_0^{f(x)} dy dx = \iint_{\mathcal{D}_1} dy dx, \mathcal{D}_1 = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \\ &= \int_c^d \int_{B(\theta)}^{T(\theta)} r dr d\theta = \int_c^d \frac{1}{2} [T(\theta) - B(\theta)]^2 d\theta. \end{aligned}$$

Setelah ditransformasi, periksa apakah fungsinya kontinu dan terbatas pada interval $\theta [c, d]$ atau tidak. Jika fungsinya kontinu dan terbatas, maka bisa diselesaikan dengan metode pias segitiga.

Contoh Penerapan dan Visualisasi Metode Pias Segitiga

Diberikan contoh penerapan dan visualisasi metode pias segitiga dalam mencari luas daerah yang dibatasi kurva pada koordinat polar dan koordinat Kartesius beserta penyelesaiannya dalam analitik sebagai berikut.

Contoh soal 1 Carilah luas daerah yang dibatasi kurva $R(\theta) = 7$ pada interval $[0, \pi]$ dengan metode pias segitiga $n = 2, n = 4, n = 6$ beserta galat maksimumnya.

Penyelesaian numerik metode pias segitiga $n = 2$

$$\int_0^\pi \frac{1}{2} (7)^2 d\theta \approx \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2} \sum_{k=1}^2 R_{k-1} R_k = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2} \left[R(0) R\left(\frac{\pi}{2}\right) + R\left(\frac{\pi}{2}\right) R(\pi) \right] = 49$$

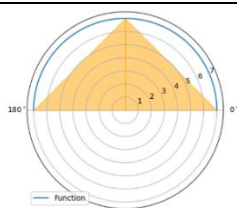
Galat maksimum metode pias segitiga $n = 2$

$$R(\theta) = 7, R'(\theta) = 0, R''(\theta) = 0$$

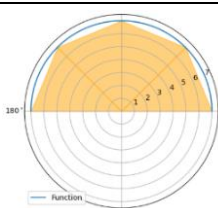
$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= \frac{1}{12}(b-a)h^2 \max |[R(c)^2 + 2R'(c)^2 - R(c)R''(c)]|, \quad a \leq c \leq b \\ &= \frac{1}{12}(\pi - 0)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \max |[7^2 + 2(0)^2 - (7)(0)]| = \frac{49}{48}\pi^3 \approx 31,65224\end{aligned}$$

Tabel 1. Hasil metode pias segitiga Contoh 3.1

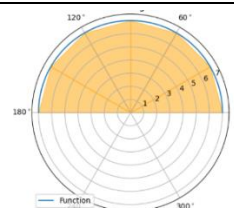
n (jumlah segitiga)	2	4	6
Solusi numerik	49	69.2965	73.5
Galat maksimum	31.6522	7.91306	3.51692



(a)



(b)

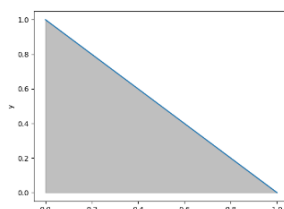


(c)

Gambar 6. (a) Metode pias segitiga $n = 2$, (b) Metode pias segitiga $n = 4$ dan (c) Metode pias segitiga $n = 6$ untuk Contoh 3.1

Dari Tabel 1 dan Gambar 6 dapat dilihat metode pias segitiga menghampiri solusi eksak luas daerah dibatasi kurva $R(\theta) = 7$ pada koordinat polar dan semakin banyak jumlah segitiga maka galat solusi numerik semakin kecil.

Contoh soal 2 Carilah luas daerah yang dibatasi kurva $f(x) = -x + 1$ pada interval $[0,1]$ dengan metode pias segitiga $n = 2$, $n = 4$, $n = 6$ beserta galat



maksimumnya.

Gambar 7. Luas daerah dibatasi kurva $f(x) = -x + 1$

Transformasi integral koordinat Kartesius ke integral koordinat polar

$$\int_0^1 (-x + 1) dx = \iint_{D_1} dy dx, \quad D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x + 1\}$$

Berdasarkan Gambar 7 diketahui daerah D_1 dibatasi garis $y = 0$, $x = 0$, dan $y = -x + 1$ pada koordinat Kartesius, selanjutnya akan dicari batas-batas daerah D_1 pada koordinat polar.

Dibatasi oleh garis $y = 0$

$$\theta = 0$$

Dibatasi oleh garis $x = 0$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Dibatasi oleh garis $y = -x + 1$

$$r \sin \theta = -r \cos \theta + 1 \quad r = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$$

$$\iint_{D_1} dy dx = \iint_{D_2} r dr d\theta, D_2 = \left\{ (\theta, r) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} \right\}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} \right)^2 d\theta$$

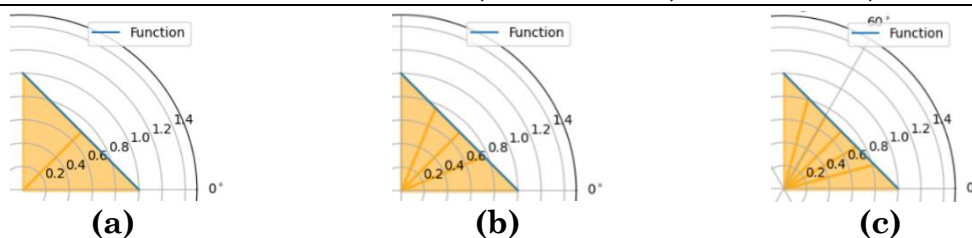
Karena $\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$ adalah fungsi yang kontinu dan terbatas pada interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ maka bisa dikerjakan dengan metode pias segitiga.

Penyelesaian numerik metode pias segitiga $n = 2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} \right)^2 d\theta \approx \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2} \sum_{k=1}^2 R_{k-1} R_k = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 0,5$$

Tabel 2. Hasil metode pias segitiga Contoh 3.2

n (jumlah segitiga)	2	4	6
Solusi numerik	0,5	0,5	0,5
Galat maksimum	$7,3 \times 10^{-17}$	$1,8 \times 10^{-17}$	$8,1 \times 10^{-18}$



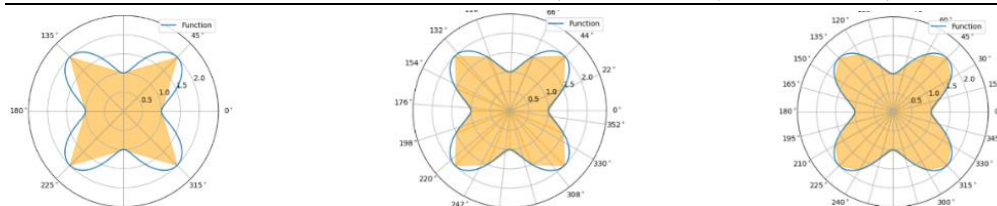
Gambar 8. (a) Metode pias segitiga $n = 2$, (b) Metode pias segitiga $n = 4$ dan (c) Metode pias segitiga $n = 6$ untuk Contoh 3.2

Dari Tabel 2 dan Gambar 8 dapat dilihat metode pias segitiga menghampiri solusi eksak luas daerah dibatasi kurva $f(x) = -x + 1$ pada koordinat Kartesius tanpa galat dan menambah jumlah segitiga tidak mempengaruhi solusi numerik metode pias segitiga.

Contoh soal 3 Carilah luas daerah yang dibatasi kurva $R(\theta) = \sin^2 2\theta + 1$ pada interval $[0, 2\pi]$ dengan metode pias segitiga $n = 8$, $n = 16$, $n = 24$ beserta galat maksimumnya.

Tabel 3. Hasil metode pias segitiga Contoh 3.3

n (jumlah segitiga)	8	16	24
Solusi numerik	5,65685	6,8883	7,18222
Galat maksimum	6,4596	1,61491	0,71774



(a) (b) (c)
Gambar 9. (a) Metode pias segitiga $n = 8$, (b) Metode pias segitiga $n = 16$ dan (c) Metode pias segitiga $n = 24$ untuk Contoh 3.3

Dari Tabel 3 dan Gambar 9 dapat dilihat metode pias segitiga menghampiri solusi eksak luas daerah dibatasi kurva $R(\theta) = \sin^2 2\theta + 1$ pada koordinat polar dan semakin banyak jumlah segitiga maka galat solusi numerik semakin kecil.

Hasil penelitian ini memperkenalkan metode pias segitiga sebagai pendekatan baru untuk integrasi numerik pada koordinat polar. Metode ini menawarkan fleksibilitas yang lebih besar dalam menangani wilayah integrasi dengan batas-batas tak beraturan, dibandingkan dengan metode Kuadratur Gauss yang digunakan dalam penelitian sebelumnya “Numerical Integration over Irregular Domains using Generalized Gaussian quadrature” oleh Jayan & Kallur (2015). Dalam metode kuadratur, titik-titik sampel khusus digunakan untuk memperkirakan hasil integral, sedangkan metode pias segitiga mengandalkan pembagian geometris wilayah ke dalam segitiga, yang memungkinkan perhitungan lebih intuitif dan visual.

Selain itu, penelitian ini menunjukkan bahwa metode pias segitiga dapat menghasilkan galat yang lebih kecil pada kondisi tertentu, dengan memperhalus partisi segitiga. Hal ini menjadikan metode pias segitiga lebih sesuai untuk aplikasi yang memerlukan akurasi tinggi dalam menghampiri wilayah integral yang rumit, terutama dalam integrasi numerik pada koordinat polar. Dengan demikian, penelitian ini memberikan alternatif baru dalam integrasi numerik dua dimensi terutama pada koordinat polar.

D. Simpulan

Berdasarkan pembahasan yang diuraikan, diperoleh kesimpulan rumus integrasi numerik metode pias segitiga $\int_a^b \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta \approx \frac{\sin h}{2} \sum_{k=1}^n R_{k-1} R_k$. Dalam metode pias segitiga, aturan yang harus dipenuhi adalah jumlah segitiga $n \geq \left\lfloor \frac{b-a}{\pi} \right\rfloor + 1$. Rumus galat hasil metode pias segitiga $\frac{1}{12} (b-a) h^2 [R(c)^2 + 2R'(c)^2 - R(c)R''(c)]$, $a \leq c \leq b$. Dari pembuktian rumus, diperoleh bahwa $\int_a^b \frac{1}{2} [R(\theta)]^2 d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin h}{2} \sum_{k=1}^n R_{k-1} R_k$ yang artinya saat $n \rightarrow \infty$ hasil metode pias segitiga akan konvergen ke nilai eksak luas daerah yang dibatasi kurva pada koordinat polar. Metode pias segitiga juga dapat menyelesaikan masalah integrasi luas daerah dibatasi kurva pada koordinat Kartesius, namun integral harus ditransformasikan terlebih dahulu ke koordinat polar.

E. Daftar Pustaka

Ansar, A., Nopriani, N., & Ekawati, D. (2021). Pengintegralan numerik untuk interval titik yang tidak sama menggunakan aturan Boole. *Journal of Mathematics: Theory and Applications*, 8-13.

- Apushkinskiy, E. G., Kozhevnikov, V. A., & Biryukov, A. V. (2023). Comparison of approximate and numerical methods for solving the homogeneous dirichlet problem for the helmholtz operator in a two-dimensional domain. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 44, 3989-3997.
- Biswas, S., Moi, S., & Sarkar, S. P. (2022). Numerical integration of neutrosophic valued function by Gaussian quadrature methods. *Arabian Journal of Mathematics*, 11, 189-211.
- Bradie, B. (2016). Yet more ways to skin a definite integral. *The College Mathematics Journal*, 47(1), 11-18.
- Darmawan, R. N. (2016). Perbandingan metode Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto, dan Gauss-Kronrod pada integrasi numerik fungsi eksponensial. *JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 1(2), 99-108.
- Diethelm, K. (2014). Error bounds for the numerical integration of functions with limited smoothness. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 52(2), 877-879.
- Erma, E., & Alwi, W. (2017). Solusi integrasi numerik dengan metode Simpson (Simpson'S Rule) pada transformasi Hankel. *Jurnal MSA*, 5(1), 81-91.
- Ermawati, Rahayu, P., & Zuiharoh, F. (2017). Perbandingan solusi numerik integral lipat dua pada fungsi aljabar dengan metode Romberg dan simulasi Monte Carlo. *Jurnal MSA*, 5(2), 14.
- Javed, M., & Trefethen, L. N. (2014). A trapezoidal rule error bound unifying the Euler–Maclaurin formula and geometric convergence for periodic functions. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 470(2161), 1-9.
- Jayan, S., & Kallur, N. (2015). Numerical integration over irregular domains using generalized Gaussian quadrature. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 18(1), 21-30.
- Jones, L. K. (2017). An elementary derivation of the numerical integration bounds in beginning calculus. *The American Mathematical Monthly*, 124(6), 558-561.
- Maure, O. P., & Mungkasi, S. (2021). Verifikasi tingkat keakuratan beberapa metode integrasi numerik fungsi atas satu peubah bebas. *JURNAL SILOGISME: Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya*, 6(1), 58-64.
- Meiliana, Prihandono, B., & Yudhi. (2024). Penyelesaian integral tak wajar secara numerik menggunakan metode trapesium. *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, 13(1), 81-88.
- Mulyono, Suryana, M. E., Siswoyo, C. T., & Rahmanto, A. (2022). Evaluasi dari metode: trapesium, simpson 1/3, simpson 3/8 dan newton cotes orde 4-10 untuk menghitung integral tertentu secara numerik. *AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 13(3), 466-479.

- Munir, R. (2015). *Metode Numerik* (Keempat ed.). Bandung: Informatika Bandung.
- Nurhaliza, N., & Zulfah, Z. (2021). Analisis galat metode Euler pada persamaan diferensial biasa. *Jurnal Pendidikan Tambusai*, 5(3), 114566-114569.
- Pandu, Y. K. (2019). Penerapan integral numerik dalam menghitung luas daerah tidak beraturan. *Asimtot: Jurnal Kependidikan Matematika*, 1(2), 127-132.
- Purcell, E. J., & Varberg, D. (1998). *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1* (Kelima ed.). Jakarta: Erlangga.
- Putri, R. Y., & Wartono. (2020). Modifikasi metode Schroder tanpa turunan kedua dengan orde konvergensi empat. *AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 11(2), 240-251.
- Silpia, I., Syamsudhuha, & M, M. (2014). Integrasi numerik tanpa error untuk fungsi-fungsi tertentu. *JOM FMIPA*, 1(2), 484-491.
- Stewart, J. (2003). *Kalkulus Jilid 2* (Keempat ed.). Jakarta: Erlangga.
- Suciaty, F., Ifriyanto, M. H., & Usemahu, S. R. (2023). Estimasi volume pengerukan pelabuhan Tanjung Laut dengan metode integrasi numerik. *RekaRacana: Jurnal Teknik Sipil*, 9(2), 136.
- Trefethen, L. N., & Weideman, J. C. (2014). The exponentially convergent trapezoidal rule. *SIAM Review*, 56(3), 385-458.
- Triatmodjo, B. (2002). *Metode Numerik* (Revisi ed.). Yogyakarta: Beta Offset.
- Utari, R. S., Septy, L., & Hutaaruk, L. (2021). Kesalahan pemahaman konsep peserta didik dalam menyelesaikan soal-soal integral lipat dua pada koordinat polar. *Inomatika*, 3(1), 51-61.
- Utomo, B. (2021). Luas daerah dengan pendekatan titik berbantu python. *Prosiding sendika*, 7(2), 514-519.
- Villarino, M. B. (2020). Gauss on Gaussian quadrature. *The American Mathematical Monthly*, 127(2), 125-138.
- Wu, B., & Martinsson, P. G. (2021). Zeta correction: a new approach to constructing corrected trapezoidal quadrature rules for singular integral operators. *Advances in Computational Mathematics*, 47, 45.
- Zein, E. D., Rasimeng, S., & Dani, I. (2022). Validasi pengaruh jumlah partisi dalam perhitungan metode integrasi numerik terhadap tingkat akurasi dan galat menggunakan Matlab (Studi kasus: Riemann kiri dan aturan trapesium). *Asimtot : Jurnal Kependidikan Matematika*, 4(1), 51-61.