RUANG FUNGSI MUSIELAK-ORLICZ TIPE BOCHNER

Yulia Romadiastri[1]

[1] Dosen Prodi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah IAIN Walisongo Semarang

Jl. Walisongo 3-5 Semarang, Telp./Faks.: 024-7604554/024-7601293

ABSTRAK

Fungsi Musielak-Orlicz merupakan fungsi Orlicz dengan beberapa syarat tambahan yang berlaku, yang kemudian membentuk suatu ruang fungsi Musielak-Orlicz. Ruang fungsi Musielak-Orlicz dibangkitkan oleh suatu modular yang mempunyai sifat konveks. Penambahan syarat tertentu pada ruang fungsi Musielak-Orlicz membentuk suatu ruang fungsi Musielak-Orlicz tipe Bochner $L_{\phi}(\mu, X)$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa ruang fungsi Musielak-Orlicz tipe Bochner merupakan ruang linear dan juga ruang bernorma dengan norma $\|.\|: L_{\phi}(\mu, X) \to \mathbf{R}$, dengan $\|f\| = \left\| \|f(.)\|_X \right\|_{\phi}$, untuk setiap $f \in L_{\phi}(\mu, X)$. Berikutnya, ditemukan bahwa ruang fungsi Musielak-Orlicz tipe Bochner ini juga merupakan ruang Banach.

Kata Kunci: ruang fungsi Musielak-Orlicz, modular konveks, dan ruang Banach

1. Pendahuluan

Perkembangan teknologi saat ini mengalami kemajuan yang begitu besar. Hal ini tentu tidak lepas dari peranan ilmu-ilmu dasar yang menjadi landasannya. Salah satu ilmu dasar yang selalu menjadi landasan perkembangan teknologi tersebut adalah matematika. Dalam matematika, salah satu materi yang juga sedang dan telah berkembang, baik secara teori maupun aplikasinya, adalah bidang analisis matematika.

Salah satu topik yang sedang berkembang pada bidang analisis matematika adalah teori ruang Orlicz. Ruang Orlicz diperkenalkan pertama kali pada tahun 1931 oleh W. Orlicz. Teori ruang Orlicz mempunyai peranan yang sangat penting dan telah banyak diterapkan ke dalam berbagai cabang matematika, salah satunya pada masalah *Optimal Control.* Pengembangan dari ruang Orlicz sendiri juga mengalami kemajuan yang sangat pesat, salah satunya adalah ruang fungsi Musielak-Orlicz. Ruang fungsi ini dikembangkan oleh Musielak dan Orlicz yang merupakan perluasan dari ruang fungsi Orlicz yang dibangkitkan oleh suatu modular yang mempunyai sifat konveks. Dalam hal ini, $\widetilde{I}_{\phi}(f) = \int_T \phi(t, \|f(t)\|_X) d\mu$ yang merupakan modular konveks membangkitkan ruang fungsi Musielak-Orlicz tipe Bochner $L_{\phi}(\mu, X) = \left\{ f \in L^0(T, X) : \|f(.)\|_X \in L_{\phi} \right\}$, yang juga merupakan ruang Banach.

2. Pengertian Dasar

Definisi 2.1 *Suatu himpunan X yang tak kosong disebut* ***ruang linear (ruang vektor)*** *atas lapangan* $\mathbb{R}$ *jika memenuhi*

(L1) (X,+) merupakan grup Abelian.

(L2) Untuk setiap $x, y \in X$ *dan* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *berlaku* $\alpha x \in X$ *dan:*

$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y,$

$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x,$

$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

1x = x.

Definisi 2.2 *Diberikan ruang linear X. Fungsi* $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ *disebut* ***norma*** *jika*

(B1) $\|x\| \geq 0$ *untuk setiap* $x \in X$,

$\|x\| = 0$ *jika dan hanya jika* $x = \theta$,

(B2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ *untuk setiap* $x \in X$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$,

(B3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *untuk setiap* $x, y \in X$.

Ruang linear *X* yang dilengkapi dengan suatu norma ||.|| disebut ruang bernorma dan dilambangkan dengan (*X*, ||.||). Selanjutnya, jika normanya sudah tertentu, maka ruang bernorma cukup ditulis *X* saja.Setiap ruang bernorma (*X*, ||.||) merupakan ruang metrik terhadap

$$d(x,y) = \|x-y\|,\ x,y \in X.$$

Definisi 2.3 *Diberikan ruang bernorma* $(X, \|.\|)$.

(i) Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ *dikatakan* ***konvergen*** *ke* $x \in X$ *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* n_0 *sehingga untuk setiap bilangan asli* $n \geq n_0$ *berlaku* $\|x_n - x\| < \varepsilon$. *Barisan* $\{x_n\}$ *konvergen ke x dinotasikan dengan* $\|x_n - x\| \to 0,$ *untuk* $n \to \infty$ *atau* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(ii) Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ *disebut* ***barisan Cauchy*** *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* n_0 *dengan sifat untuk setiap dua bilangan asli* $m, n \geq n_0$ *berlaku* $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Teorema 2.4 *Diberikan ruang bernorma* $(X, \|.\|)$. *Jika barisan* $\{x_n\} \subseteq X$ *konvergen, maka* $\{x_n\}$ *merupakan barisan Cauchy.*

Definisi 2.5

(i) *Ruang bernorma* $(X, \|.\|)$ *dikatakan* ***lengkap*** *jika setiap barisan Cauchy di dalam X konvergen.*

(ii) *Ruang bernorma* $(X, \|.\|)$ *disebut* ***ruang Banach*** *jika* $(X, \|.\|)$ *lengkap.*

Definisi 2.6 *Diberikan X ruang bernorma.*

(i) *Barisan* $\{f_n\} \subset X$ *dikatakan* ***summable*** *ke suatu* $s \in X$ *jika barisan* $\{s_n\}$, *dengan* $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ *konvergen ke s. Ditulis dengan* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = s$.

(ii) *Barisan* $\{f_n\} \subset X$ *dikatakan* ***absolutely summable*** *jika* $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < \infty$.

Teorema 2.7 *Ruang bernorma X lengkap jika dan hanya jika setiap barisan yang absolutely summable adalah summable.*

3. Ruang Bermodular

Definisi 3.1 *Diberikan sebarang ruang linear* T *atas lapangan* □ .

Fungsi non-negatif $\rho : T \to [0, \infty)$ *disebut* ***modular*** *pada* T *jika untuk setiap* $x, y \in T$ *berlaku:*

(M1) $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

(M2) $\rho(-x) = \rho(x)$,

(M3) $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ *jika* $\alpha, \beta \in [0,1]$ *dengan* $\alpha + \beta = 1$.

Ruang linear T yang dilengkapi dengan suatu modular disebut **ruang bermodular** dan dilambangkan dengan (T, ρ).

Suatu himpunan $B \subseteq Y$, dengan Y ruang linear, disebut **himpunan konveks** jika untuk setiap $x, y \in B$ dan $\alpha, \beta \in [0,1]$ dengan $\alpha + \beta = 1$, berlaku $\alpha x + \beta y \in B$. Fungsi $f : B \to \mathbb{R}$ dikatakan **konveks**, jika B konveks dan untuk setiap $x, y \in B$ dan $\alpha, \beta \in [0,1]$ dengan $\alpha + \beta = 1$ berlaku $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$. Selanjutnya, modular ρ dikatakan memenuhi sifat konveks jika ρ merupakan fungsi konveks. Pada pembahasan selanjutnya, yang dimaksud modular adalah modular yang memenuhi sifat konveks, kecuali bila dinyatakan lain.

Teorema 3.2

(i) *Jika* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ *dengan* $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$, *maka* $\rho(\alpha_1 x) \leq \rho(\alpha_2 x)$ *untuk setiap* $x \in X$.

(ii) *Jika* $\rho(x) < \varepsilon$ *untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *maka* $x = \theta$.

4. Ruang Fungsi Musielak-Orlicz tipe Bochner

Definisi 4.1 *Diberikan sebarang ruang linear T.*

Fungsi $\phi : T \times \mathbf{R} \to [0, \infty)$ *disebut* ***fungsi Musielak – Orlicz*** *jika:*

(1) $\phi(t,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$, *untuk setiap* $t \in T$,

(2) $\phi(t,-u) = \phi(t,u)$

(3) $\phi(t,.)$ *kontinu*

(4) $\phi(t,.)$ *naik pada* $(0,\infty)$

(5) $\phi(\cdot,u)$ *terukur, untuk setiap* $u \in \mathbf{R}$

(6) $\phi(t,\cdot)$ *konveks,*

(7) $\dfrac{\phi(t,u)}{u} \to 0$ *jika* $u \to 0$ *pada T.*

Contoh 4.2

Diketahui T ruang linear sebarang dan fungsi $\phi : T \times \mathbf{R} \to [0, \infty)$, dengan

$$\phi(t,u) = |u|^p, 1 < p < \infty,$$

untuk setiap t. Fungsi ϕ merupakan fungsi Musielak-Orlicz, karena:

1. $\phi(t,u) = 0 \Leftrightarrow |u|^p = 0 \Leftrightarrow |u| = 0 \Leftrightarrow u = 0$, untuk setiap $t \in T$,

2. $\phi(t,-u) = |-u|^p = |u|^p = \phi(t,u)$,

3. $\phi(t,.)$ kontinu,

4. $\phi(t,.)$ naik pada $(0,\infty)$,

5. $\phi(\cdot,u)$ terukur, untuk setiap $u \in \mathbf{R}$, karena untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dibentuk barisan fungsi sederhana $\varphi_n : T \to \mathbb{R}$, dengan $\varphi_n(t) = |u|^p, 1 < p < \infty, u \in \mathbb{R}$, untuk setiap *n*. Diperoleh bahwa untuk setiap *n*, φ_n merupakan fungsi konstan. Selanjutnya, $\lim\limits_{n\to\infty} |\varphi_n(t) - \phi(t,u)| = \lim\limits_{n\to\infty} \left||u|^p - |u|^p\right| = 0.$

6. $\phi(t,\cdot)$ konveks.

   Dipunyai $\phi(t,u) = |u|^p, 1 < p < \infty.$

   Diperoleh $\phi_u = \begin{cases} p\left(u^{p-1}\right), u > 0 \\ \pm p\left(u^{p-1}\right), u < 0 \end{cases}$. Akibatnya $\phi_{uu} = \begin{cases} p(p-1)\left(u^{p-2}\right), u > 0 \\ \pm p(p-1)\left(u^{p-2}\right), u < 0 \end{cases}$.

   Jadi untuk setiap $u \neq 0,$ diperoleh $\phi_{uu} \geq 0.$ Jadi ϕ konveks pada $(-\infty,0] \cup [0,\infty) = \mathbb{R}$.

7. jika $u \to 0$ pada T, maka $\dfrac{\phi(t,u)}{u} = \dfrac{|u|^p}{u}.$

   Diperoleh untuk $u > 0,$ berlaku $\dfrac{u^p}{u} = u^{p-1} \to 0$ dan untuk $u < 0,$ berlaku $\dfrac{(-u)^p}{-u} = \pm u^{p-1} \to 0.$ ■

Untuk fungsi Musielak-Orlicz ϕ, didefinisikan fungsi $I_\phi : L^0 \to [0,\infty)$ dengan

$$I_\phi(f) = \int_T \phi(t, f(t))d\mu,$$

untuk setiap $f \in L^0$. Dapat ditunjukkan bahwa fungsi I_ϕ merupakan modular konveks. Kemudian, didefinisikan ruang fungsi Musielak–Orlicz L_ϕ, dengan $L_\phi = \left\{f \in L^0 : I_\phi(cf) < \infty \text{ untuk suatu } c > 0\right\}$. Dapat ditunjukkan bahwa ruang fungsi Musielak-Orlicz L_ϕ merupakan ruang linear. Selanjutnya, fungsi Musielak-Orlicz ϕ dan ψ dikatakan saling berkomplemen jika $|xy| \leq \phi(x) + \psi(y)$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$..

Untuk setiap fungsi Musielak–Orlicz ϕ, didefinisikan fungsi $\phi^* : T \times \mathbf{R} \to [0,\infty)$, dengan

$$\phi^*(t,v) = \sup_{u>0}\{u|v| - \phi(t,u)\},$$

untuk setiap $v \in \mathbf{R}$ dan $t \in T$. Dapat ditunjukkan bahwa fungsi ϕ^* juga merupakan fungsi Musielak-Orlicz.

Teorema 4.3 *Untuk setiap fungsi Musielak-Orlicz* ϕ, *berlaku* $uv \le \phi(t,u) + \phi^*(t,v),\ u,v \ge 0,$ *untuk setiap* $t \in T$.

Definisi 4.4 *Fungsi Musielak – Orlicz* ϕ *dikatakan memenuhi* **kondisi-**Δ_2, *ditulis* $\phi \in \Delta_2$, *jika terdapat konstanta* $k > 0$ *dan* $u_0 \ge 0$ *sehingga* $\phi(t,2u) \le k\phi(t,u)$, *untuk setiap* $t \in T$ *dan* $u \ge u_0$.

Selanjutnya, didefinisikan fungsi $\tilde{I}_\phi : L^0(T,X) \to (0,\infty)$, dengan $\tilde{I}_\phi(f) = \int_T \phi(t, \|f(t)\|_X)d\mu$,untuk setiap $f \in L^0(T,X)$. Dapat ditunjukkan bahwa fungsi $\tilde{I}_\phi$ merupakan modular.

Teorema 4.5 *Fungsi* $\tilde{I}_\phi$ *merupakan modular.*

Bukti:

Untuk setiap $f, g \in L^0(T,X)$ berlaku:

(1) $\tilde{I}_\phi(f) = 0 \Leftrightarrow \int_T \phi(t, \|f(t)\|_X)d\mu = 0$

$\Leftrightarrow \phi(t, \|f(t)\|_X) = 0$, h.d. pada T

$\Leftrightarrow \|f(t)\|_X = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$, h.d. pada T

$\Leftrightarrow f = \theta$, h.d. pada T ,

(2) $\tilde{I}_\phi(-f) = \int_T \phi(t, \|-f(t)\|_X)d\mu$

$= \int_T \phi(t, \|f(t)\|_X)d\mu$.

$= \tilde{I}_\phi(f)$,

(3) untuk $\alpha, \beta \in [0,1]$ dengan $\alpha + \beta = 1$, akan ditunjukkan $\tilde{I}_\phi(\alpha f + \beta g) \le \tilde{I}_\phi(f) + \tilde{I}_\phi(g)$.

Karena ϕ merupakan fungsi naik, maka berlaku

$$\phi(t, \|(\alpha f + \beta g)(t)\|_X) \le \phi(t, (\|(\alpha f)(t)\|_X + \|(\beta g)(t)\|_X)).$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{\phi}(\alpha f+\beta g) &= \int_T \phi\left(t,\|(\alpha f+\beta g)(t)\|_X\right)d\mu \\ &\le \int_T \phi\left(t,\left(\|(\alpha f)(t)\|_X+\|(\beta g)(t)\|_X\right)\right)d\mu \\ &= \int_T \phi\left(t,\left(|\alpha|\|f(t)\|_X+|\beta|\|g(t)\|_X\right)\right)d\mu \\ &\le \int_T \left(\alpha\phi\left(t,\|f(t)\|_X\right)+\beta\phi\left(t,\|g(t)\|_X\right)\right)d\mu \\ &= \int_T \alpha\phi\left(t,\|f(t)\|_X\right)d\mu+\int_T \beta\phi\left(t,\|g(t)\|_X\right)d\mu \\ &= \alpha\int_T \phi\left(t,\|f(t)\|_X\right)d\mu+\beta\int_T \phi\left(t,\|g(t)\|_X\right)d\mu \\ &\le \int_T \phi\left(t,\|f(t)\|_X\right)d\mu+\int_T \phi\left(t,\|g(t)\|_X\right)d\mu \\ &= \tilde{I}_{\phi}(f)+\tilde{I}_{\phi}(g).\end{aligned}$$

Dari (1), (2), dan (3) terbukti bahwa fungsi $\tilde{I}_{\phi}$ merupakan modular.■

Untuk fungsi Musielak-Orlicz ϕ, didefinisikan $L_{\phi}(\mu,X)=\left\{f\in L^0(T,X):\|f(.)\|_X\in L_{\phi}\right\}$. Dapat ditunjukkan pula bahwa $L_{\phi}(\mu,X)$ merupakan ruang linear.

Teorema 4.6 *Ruang fungsi* $L_{\phi}(\mu,X)$ *merupakan ruang linear*.

Bukti:

Diambil sebarang $f,g\in L_{\phi}(\mu,X)$ dan α skalar, artinya $\|f(.)\|_X\in L_{\phi}$ dan $\|g(.)\|_X\in L_{\phi}$. Karena L_{ϕ} ruang linear, maka berlaku $\left(\|f(.)\|_X+\|g(.)\|_X\right)\in L_{\phi}$ dan $\|(\alpha f)(.)\|_X=|\alpha|\|f(.)\|_X\in L_{\phi}$. Akibatnya $\alpha f\in L_{\phi}(\mu,X)$. Selanjutnya, karena $\|f(.)\|_X\in L_{\phi}$ dan $\|g(.)\|_X\in L_{\phi}$, maka berdasarkan definisi diperoleh bahwa $\|f(.)\|_X,\|g(.)\|_X\in L^0$ dan terdapat $c_1,c_2>0$ sehingga berlaku $I_{\phi}\left(c_1\|f(.)\|_X\right)=I_{\phi}\left(\|(c_1 f)(.)\|_X\right)<\infty$ dan $I_{\phi}\left(c_2\|g(.)\|_X\right)=I_{\phi}\left(\|(c_2 g)(.)\|_X\right)<\infty$.

Dipilih $c = \min\{c_1, c_2\}$, maka $\frac{1}{2}c > 0$ dan berlaku

$$
\begin{aligned}
I_\phi\left(\frac{1}{2}c\left\|(f+g)(.)\right\|_X\right) = I_\phi\left(\left\|\frac{1}{2}c(f+g)(.)\right\|_X\right) &= I_\phi\left(\left\|\left(\frac{1}{2}cf + \frac{1}{2}cg\right)(.)\right\|_X\right)\\
&= I_\phi\left(\left\|\left(\frac{1}{2}cf\right)(.) + \left(\frac{1}{2}cg\right)(.)\right\|_X\right)\\
&\le \frac{1}{2}I_\phi\left(\left\|(cf)(.)\right\|_X\right) + \frac{1}{2}I_\phi\left(\left\|(cg)(.)\right\|_X\right)\\
&\le I_\phi\left(\left\|(c_1 f)(.)\right\|_X\right) + I_\phi\left(\left\|(c_2 g)(.)\right\|_X\right)\\
&< \infty .
\end{aligned}
$$

Jadi $\left\|(f+g)(.)\right\|_X \in L_\phi$. Karena $f, g \in L_\phi(\mu, X)$ maka $f, g \in L^0(T, X)$. Diperoleh $f + g \in L^0(T, X)$. Dengan kata lain, $f + g \in L_\phi(\mu, X)$.

Jadi $L_\phi(\mu, X)$ merupakan ruang linear.■

Didefinisikan $\|.\| : L_\phi(\mu, X) \to \mathbf{R}$, dengan $\|f\| = \left\|\left\|f(.)\right\|_X\right\|_\phi$, untuk setiap $f \in L_\phi(\mu, X)$. Dapat ditunjukkan bahwa $(L_\phi(\mu, X), \|.\|)$ merupakan ruang bernorma.

Teorema 4.7 *Ruang fungsi* $L_\phi(\mu, X)$ *merupakan ruang bernorma.*

Bukti:

Menurut Teorema 4.6, $L_\phi(\mu, X)$ merupakan ruang linear. Tinggal ditunjukkan $\|.\|$ merupakan norma.

(N1) Karena $\|.\|_X$ merupakan norma, maka $\|f\|_X \ge 0$. Akibatnya, diperoleh bahwa $\left\|\left\|f(.)\right\|_X\right\|_\phi \ge 0$. Jadi $\|f\| \ge 0$. Selanjutnya,

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \left\|\left\|f(.)\right\|_X\right\|_\phi = 0 \Leftrightarrow \left\|f(.)\right\|_X = 0 \Leftrightarrow f = \theta .$$

(N2) Untuk setiap $f \in L_\phi(\mu, X)$ dan α skalar, berlaku

$$
\begin{aligned}
\|\alpha f\| &= \left\|\left\|(\alpha f)(.)\right\|_X\right\|_\phi\\
&= \left\||\alpha|\left\|f(.)\right\|_X\right\|_\phi
\end{aligned}
$$

$$= |\alpha| \left\| \| f(.) \|_X \right\|_\phi$$

$$= |\alpha| \| f \|.$$

(N3) Diambil sebarang $f, g \in L_\phi(\mu, X)$. Diperoleh,

$$\| f + g \| = \left\| \| (f + g)(.) \|_X \right\|_\phi$$

$$= \left\| \| f(.) + g(.) \|_X \right\|_\phi$$

$$\leq \left\| \| f(.) \|_X + \| g(.) \|_X \right\|_\phi$$

$$\leq \left\| \| f(.) \|_X \right\|_\phi + \left\| \| g(.) \|_X \right\|_\phi$$

$$= \| f \| + \| g \|.$$

Dari (N1), (N2), dan (N3) diperoleh bahwa $(L_\phi(\mu, X), \|.\|)$ adalah ruang bernorma terhadap norma $\| f \| = \left\| \| f(.) \|_X \right\|_\phi$.■

Teorema 4.8 *Ruang bernorma* $(L_\phi(\mu, X), \|.\|)$ *merupakan ruang Banach*.

Bukti:

Diambil sebarang $\{f_n\} \subseteq L_\phi(\mu, X)$ sehingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \| = M < \infty.$$

Klaim $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergen di dalam $L_\phi(\mu, X)$. Selanjutnya, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan g_n dengan $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} | f_k(x) |$. Maka

$$\| g_n \| = \left\| \sum_{k=1}^{n} | f_k | \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \| f_k \| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \| f_k \| = M.$$

Karena $\| g_n \| \leq M \Rightarrow \int | g_n |^p \leq M^p$.

Untuk setiap x, berlaku $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ dan $\|g_n\| \leq M$, maka $g_n(x) \to g(x)$. Akibatnya g terukur. Selanjutnya, karena $\{g_n\}$ naik dan tak negatif, maka menurut Lemma Fatou berlaku

$$\int g^p \leq \underline{\lim} \int g_n^p = \underline{\lim} \int |g_n|^p \leq M^p.$$

Akibatnya g^p terintegral dan g berhingga h.d. pada T.

Jadi, ada $T' \subset T$ dengan $\mu(T') = 0$ sehingga $g(x) < \infty$, untuk setiap $x \in T - T'$.

Akibatnya, untuk setiap $x \in T - T'$, berlaku $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *absolutely summable*. Artinya, bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \infty$. Akibatnya $\{g_n\}$ konvergen, katakan ke $s(x)$.

Selanjutnya didefinisikan $t(x) = \begin{cases} s(x), x \in T - T' \\ 0, x \in T' \end{cases}$. Diperoleh $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ dan s terukur.

Karena $|s_n(x)| \leq g(x)$, maka $|s(x)| \leq g(x)$. Diperoleh,

$$\begin{aligned} |s_n(x) - s(x)|^p &\leq \left(|s_n(x)| + |s(x)|\right)^p \\ &\leq \left(|g(x)| + |g(x)|\right)^p = 2^p g(x)^p. \end{aligned}$$

Karena $2^p g^p$ terintegral dan $|s_n(x) - s(x)|^p \to 0\, h.d.$ pada □, maka

$$\int |s_n - s| \to 0.$$

Akibatnya, $\|s_n - s\|^p \to 0 \Leftrightarrow \|s_n - s\| \to 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow s_n \to s \\ &\Leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{n} f_k\right\} \to s \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k = s. \end{aligned}$$

Dengan kata lain, $\{f_n\}$ *summable*. Jadi diperoleh $L_\phi(\mu, X)$ lengkap.

Terbukti bahwa ruang bernorma $(L_\phi(\mu, X), \|.\|)$ merupakan ruang Banach.■

Selanjutnya, ruang fungsi $L_\phi(\mu, X)$ disebut **ruang fungsi Musielak – Orlicz tipe Bochner**.

5. Kesimpulan

Di dalam pembahasan telah dibuktikan bahwa, $I_\phi(f) = \int_T \phi(t, f(t))\, d\mu$ merupakan modular konveks. Modular ini membangkitkan ruang fungsi Musielak-Orlicz $L_\phi = \{f \in L^0 : I_\phi(cf) < \infty \textit{ untuk suatu } c > 0\}$. Selanjutnya, untuk setiap fungsi Musielak – Orlicz ϕ, didefinisikan fungsi $\phi^*(t,v) = \sup_{u>0}\{u|v| - \phi(t,u)\}$, yang juga merupakan fungsi Musielak-Orlicz dan fungsi ϕ^* disebut fungsi komplemen dari ϕ. Selanjutnya telah ditunjukkan pula bahwa $\tilde{I}_\phi(f) = \int_T \phi(t, \|f(t)\|_X)\, d\mu$ merupakan modular konveks. Modular ini membangkitkan ruang fungsi Musielak-Orlicz tipe Bochner $L_\phi(\mu, X) = \{f \in L^0(T, X) : \|f(.)\|_X \in L_\phi\}$. Lebih lanjut, $L_\phi(\mu, X)$ merupakan ruang Banach terhadap $\|f\| = \|\|f(.)\|_X\|_\phi$ untuk setiap $f \in L_\phi(\mu, X)$.

5. Referensi

Giesy, D.P., 1966, On a Convexity Condition in Normed Linear Spaces, *Transactions of the American Mathematical Society* Vol. 125 No. 1, 114-146, AMS.

Hudzik, H. and A, Kurc., W., 1987, Uniformly non-ln $^{(1)}$ Musielak-Orlicz Spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Math.,* 35, 7-8, 441-448.

Hudzik, H. and Chen, S., 1988, On Some Convexities of Orlicz and Orlicz-Bochner Spaces, *Comment. Math.,* Univ. Carolinae 029 No. 1, 13-29.

Kolwicz, P. and Pluciennik, R., 1998, P-convexity of Musielak-Orlicz Function Spaces of Bochner Tipe, *Revista Matematica Complutense* Vol. 11 No. 1.

Kolwicz, P. and Pluciennik, R., 1995, On P-convex Musielak-Orlicz Spaces, *Comment. Math.,* Univ . Carolinae 36, 655-672.

Kolwicz, P. and Pluciennik, R., 1998, P-convexity of Orlicz-Bochner Spaces, *Proceedings of The American Mathematical Society*,Vol. 126 No. 8, 2315-2322.

Kolwicz, P. and Pluciennik, R., 1997, P-convexity of Musielak-Orlicz Sequence Spaces of Bochner Tipe, *Collect. Math.48, 587-600.*

Orlicz, W, 1992, *Linear Functional Analysis*, World Scientific, London.

Orlicz, W. and Musielak, J., 1959, On Modular Spaces, *Studia Mathematica* Vol. 18, 49-64, Warsawa.

Royden, H.L., 1989, *Real Analysis*, MacMillan Publishing Company, New York.

Suparno, 2008, *Ruang Bermodular Orlicz*, Tesis, Jurusan Matematika FMIPA UGM, Yogyakarta.