

Model *Susceptible Vaccinated Infected Recovered*: formulasi dan penerapan model pada penyebaran penyakit campak di Indonesia

¹Purnami Widyaningsih, ²William Kristianto, ³Dewi Retno Sari Saputra

^{1,2,3} Pascasarjana Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret
Email: purnami_w@staff.uns.ac.id

Abstrak

Penyakit menular masih menjadi perhatian bagi Kementerian Kesehatan RI. Pencegahan penyakit menular dilakukan melalui program vaksinasi. Karakteristik penyebaran penyakit menular tersebut dapat direpresentasikan dengan model *susceptible vaccinated infected recovered* (SVIR). Campak adalah salah satu penyakit menular yang sering terjadi di dunia. Tahun 2017, banyaknya kasus campak di Indonesia menempati urutan ketujuh dunia. Dunia menetapkan target bebas penyakit campak pada tahun 2030. Penelitian ini bertujuan untuk memformulasikan model SVIR dan menerapkan model tersebut pada penyebaran penyakit campak di Indonesia. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dan terapan. Langkah yang dilakukan dalam studi literatur adalah mengidentifikasi karakteristik penyakit menular, mengubah atau menambah asumsi, membentuk kelompok baru dan menambahkan parameter dari model dasar yang digunakan, serta terakhir menentukan perubahan sesaat variabel terikat terhadap variabel bebasnya. Langkah dalam studi terapan adalah menentukan estimasi nilai parameter berdasar data yang digunakan dan menyelesaikan model yang diperoleh secara numerik serta menginterpretasikan penyelesaian tersebut. Model SVIR yang diperoleh adalah sistem persamaan diferensial nonlinear orde satu dengan 4 variabel terikat dan satu variabel bebas. Menggunakan data sekunder tahun 2009-2016 diperoleh model penyebaran penyakit campak di Indonesia. Dengan data tahun 2017 dan 2018 diperoleh bahwa eror relatif model penyebaran campak tersebut ada pada interval $[-0.345474, 0.128112]$. Pola penyebaran penyakit campak di Indonesia tahun 2009-2030 menunjukkan banyaknya individu *susceptible* dan terinfeksi mengalami trend turun, sedangkan banyaknya individu yang divaksin dan sembuh mempunyai trend naik. Tahun 2030 diperkirakan masih terdapat 490 penderita campak di Indonesia. Ini berarti Indonesia belum mencapai bebas campak sesuai dengan target Sustainable Development Goals.

Kata kunci: SVIR; campak; bebas penyakit; sustainable development goals

Abstract

Infectious diseases are still a concern for the Kementerian Kesehatan RI. Prevention of infectious diseases is carried out through a vaccination program. The characteristics of the infectious diseases transmission can be represented as a *susceptible vaccinated infected recovered* (SVIR) model. Measles is an infectious disease that often occurs in the world. In 2017, the number of measles cases in Indonesia ranks 7th in the world. The world has set a measles-free target in 2030. In this paper, we formulated and applied the SVIR model to measles disease in Indonesia. The method used is literature and application studies. The steps of the literature study are identifying diseases' characteristics, changing and adding the assumptions, forming the new compartment with its parameter from the basic SIR model, and finding the growth rate of population of each compartment. The

steps of the second study are estimating the value of parameters based on the data, solving the model numerically, and interpreting the solution. Schoolbook 10pt fonts, single spaced, Italic and arranged in one alenia with Using data year 2017 and 2018 the relative error relative of measles transmission in Indonesia is on the interval $[-0.345474, 0.128112]$. The pattern of measles transmission in Indonesia during 2009-2030 shows that the number of susceptible and infected individuals is a downward trend, while the number of vaccinated and recovered individuals is an upward trend. In 2030 there are still 490 measles sufferers in Indonesia. This means that Indonea's measles-free based on Sustainable Development Goals has not achieved yet.

Keywords: *SVIR; measles; measles-free; sustainable development goals*

A. Pendahuluan

Penyakit menular disebabkan oleh mikroorganismen patogen, seperti bakteri, virus, parasit atau jamur yang dapat menyebar langsung atau tidak langsung, World Health Organization (WHO, 2019c). Penularan terjadi melalui udara, kulit, air liur, urin, hubungan seksual, makanan dan minuman yang sudah terkontaminasi, sekresi darah, serta kontak langsung dengan individu yang terinfeksi. Pencegahan penyakit menular dilakukan melalui program vaksinasi. Penyebaran penyakit menular dapat direpresentasikan dengan model matematika. Banyak peneliti yang telah mengembangkan model matematika untuk menjelaskan penyebaran penyakit menular. Sebagai contoh campak (Hethcote, 1983; Kristianto dan Widyaningsih, 2019), tuberkulosis (Widyaningsih dkk., 2018; Widyaningsih dkk., 2019a), HIV/AIDS (Widyaningsih dkk., 2019c), dan ebola (Azizah dkk., 2017). Sebagai tambahan model tersebut juga dapat digunakan untuk penyebaran penyakit *noncommunicable*, seperti diabetes (Widyaningsih, 2018) dan tetanus (Widyaningsih dkk., 2019b). Bahkan untuk penyakit masyarakat seperti penyalahgunaan obat (Sutanto dkk., 2017).

Hethcote (1989) telah meneliti model *susceptible infected recovered (SIR)* untuk penyebaran penyakit menular, seperti campak, cacar air, difteri, polio, dan batuk rejan. Pada model tersebut, populasi diasumsikan konstan dan tidak ada faktor migrasi. Pada tahun 2008, Liu dkk. (2008) mengembangkan model *SIR* dengan menambahkan program vaksinasi, yaitu model *susceptible vaccinated infected recovered (SVIR)*. Selanjutnya, Islam (2015) menjelaskan model *SVIR* dengan populasi tidak konstan dan ada faktor migrasi.

Campak (morbili atau *measles*) adalah salah satu penyakit menular yang sering terjadi di dunia. Penyakit ini disebabkan oleh virus dari golongan *Paramyxovirus*. Gejala yang sering terjadi meliputi demam, batuk, hidung berair, mata merah atau berair, dan ruam kulit (Kementerian Kesehatan RI, 2012). Penularan dapat terjadi melalui udara yang telah terkontaminasi oleh *droplet* (percikan ludah) penderita campak saat batuk, meludah, atau bersin dan terhirup oleh individu lain. Pada tahun 2017, WHO (2019b) melaporkan bahwa banyaknya kasus campak di Indonesia menempati urutan ketujuh di

dunia. Upaya pencegahan penyakit campak dapat dilakukan melalui program vaksinasi *measles rubella (MR)* yang diberikan pada bayi usia 9 bulan (Pusat Data dan Informasi Kementerian Kesehatan RI, 2008—2019). Dalam *Sustainable Development Goals (2020)* dunia ditargetkan bebas penyakit campak tahun 2030. Oleh karena itu, upaya pencegahan penyakit campak terus dilakukan untuk mendukung tercapainya target tersebut.

Dalam penelitian ini model *SIR* oleh Hethcote (1989) digunakan sebagai model dasar yang kemudian dikembangkan dengan menambahkan program vaksinasi. Berbeda dengan Liu dkk. (2008), pada penelitian ini populasi diasumsikan tidak konstan. Selain itu, berbeda juga dengan Islam (2015) yang memasukkan faktor migrasi dalam modelnya di sini faktor migrasi tidak dipertimbangkan. Dengan demikian, diperoleh model *SVIR* yang selanjutnya diterapkan pada penyakit campak di Indonesia.

B. Metode Penelitian

Metode yang digunakan adalah studi literatur dan studi terapan. Langkah yang dilakukan dalam studi literatur adalah mengidentifikasi karakteristik penyakit menular, mengubah atau menambah asumsi, membentuk kelompok baru dan menambahkan parameter dari model dasar yang digunakan, serta terakhir menentukan perubahan sesaat variabel terikat terhadap variabel bebasnya. Dalam melakukan studi terapan digunakan data sekunder yaitu data tahunan penyebaran penyakit campak di Indonesia tahun 2009–2018. Data tahun 2009–2016 digunakan untuk mengestimasi nilai parameter dan menentukan nilai awal model, sedangkan data tahun 2017 dan 2018 digunakan untuk menentukan error model. Sistem masalah nilai awal yang diperoleh selanjutnya diselesaikan secara numerik. Penyelesaian tahun 2017 dan 2018 dibandingkan dengan data real pada tahun yang sama. Selanjutnya dari penyelesaian model dibuat *scatter plot* untuk memperoleh pola penyebaran penyakit campak di Indonesia dan selanjutnya ditentukan prediksi penyebaran tahun 2030 untuk menentukan dipenuhi tidaknya target bebas penyakit campak Indonesia berdasar *Sustainable Development Goals*.

C. Hasil dan Pembahasan

Bagian ini menyajikan formulasi model *SVIR* dan penerapan model tersebut dalam penyebaran penyakit campak di Indonesia. Penyebaran penyakit menular dapat direpresentasikan dengan model *SIR* (Hethcote, 1989). Berbeda dengan Hethcote (1989), pada penelitian ini populasi diasumsikan tidak konstan dan tidak ada faktor migrasi sehingga laju kelahiran dan laju kematian bernilai tidak sama. Jika θ adalah laju kelahiran maka banyaknya kelahiran yang semula sebesar μN berubah menjadi θN . Selain itu, pada penelitian ini kematian pada kelompok individu

I dibedakan menjadi dua, yaitu kematian alami dan kematian karena penyakit. Berdasarkan model SIR oleh Hethcote (1989), laju kematian μ dimisalkan sebagai laju kematian alami. Sedangkan, jika δ adalah laju kematian karena penyakit maka banyaknya individu kelompok I berkurang sebesar δI .

Program vaksinasi merupakan upaya yang dilakukan untuk mencegah penyakit menular. Menurut *WHO* (2019a), dengan adanya program vaksinasi dapat mencegah sekitar 2 sampai 3 juta kematian setiap tahun yang disebabkan oleh penyakit menular. Liu dkk. (2008) mengembangkan model SIR dengan menambahkan program vaksinasi, yaitu model $SVIR$. Individu yang telah divaksin dikategorikan sebagai kelompok individu *vaccinated*. Sasaran vaksin adalah individu kelompok S . Jika α adalah laju vaksinasi maka banyaknya individu kelompok S berkurang sebesar αS dan banyaknya individu kelompok V bertambah sebesar αS . Individu yang telah divaksin dimungkinkan untuk terinfeksi penyakit. Jika individu kelompok V terinfeksi penyakit maka kondisi tersebut dikatakan sebagai kegagalan vaksin. Pada model Islam [5] telah dimasukkan pengaruh kegagalan vaksin. Jika σ adalah laju kegagalan vaksin maka banyaknya individu kelompok V berkurang sebesar $\sigma VI/N$ dan banyaknya individu kelompok I bertambah sebesar $\sigma VI/N$. Individu yang telah divaksin juga dimungkinkan tidak dapat terinfeksi penyakit dan menjadi individu yang kebal dari penyakit tersebut. Kondisi ini dikatakan sebagai imunitas vaksin. Pada model Harianto dan Suparwati (2017) telah dimasukkan pengaruh imunitas vaksin. Jika λ adalah laju imunitas vaksin maka banyaknya individu kelompok V berkurang sebesar λV dan banyaknya individu kelompok R bertambah sebesar λV . Selain itu, kematian alami juga dapat terjadi pada kelompok individu V sehingga banyaknya individu kelompok V berkurang sebesar μV .

Dengan demikian, berdasarkan perubahan sesaat banyaknya individu kelompok S , V , I , dan R , model $SVIR$ untuk penyakit menular secara lengkap diformulasikan sebagai

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \theta N - \beta \frac{SI}{N} - \alpha S - \mu S, \\
 \frac{dV}{dt} &= \alpha S - \sigma \frac{VI}{N} - \lambda V - \mu V, \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta \frac{SI}{N} + \sigma \frac{VI}{N} - \gamma I - \delta I - \mu I \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I + \lambda V - \mu R,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

dengan $S(0) \geq 0$, $V(0) \geq 0$, $I(0) > 0$, $R(0) \geq 0$ dan $\theta, \mu, \beta, \gamma, \delta, \alpha, \sigma, \lambda > 0$. Kedelapan parameter tersebut secara berturut-turut adalah laju kelahiran, laju kematian alami, laju kontak, laju kesembuhan, laju kematian karena

penyakit, laju vaksinasi, laju kegagalan vaksin, dan laju imunitas vaksin. Model (1) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear orde satu dengan variabel bebas t dan empat variabel terikat S , V , I , dan R .

Penerapan

Model $SVIR$ (1) diterapkan pada penyakit campak di Indonesia. Sebelumnya, Kristianto dan Widyaningsih (2019) meneliti dan menerapkan model $SVIR$ (1) tanpa memasukkan faktor kematian karena penyakit pada penyebaran penyakit campak di Indonesia berdasarkan data sekunder tahun 2011–2017. Berbeda dengan Kristianto dan Widyaningsih (2019), pada penelitian ini digunakan data sekunder penyakit campak di Indonesia tahun 2009–2018 yang diperoleh dari Pusat Data dan Informasi Kementerian Kesehatan Indonesia (2009–2018) dan *World Bank* (2019). berupa data tahunan. Data tahun 2009–2016 digunakan untuk mengestimasi nilai parameter pada model, sedangkan data tahun 2017 dan 2018 digunakan untuk menentukan kecocokan model. Hasil estimasi nilai kedelapan parameter pada model $SVIR$, yaitu laju kelahiran (θ) sebesar 0.020123, laju kematian alami (μ) sebesar 0.007101, laju kontak (β) sebesar 1.087454, laju kesembuhan (γ) sebesar 0.999728, laju kematian karena penyakit campak (δ) sebesar 0.000272, laju vaksinasi (α) sebesar 0.019692, laju kegagalan vaksin (σ) sebesar 0.001220, dan laju imunitas vaksin (λ) sebesar 0.166667. Selanjutnya, nilai parameter tersebut disubstitusikan ke dalam model (1). Dengan demikian, diperoleh model $SVIR$ pada penyebaran penyakit campak di Indonesia, yaitu

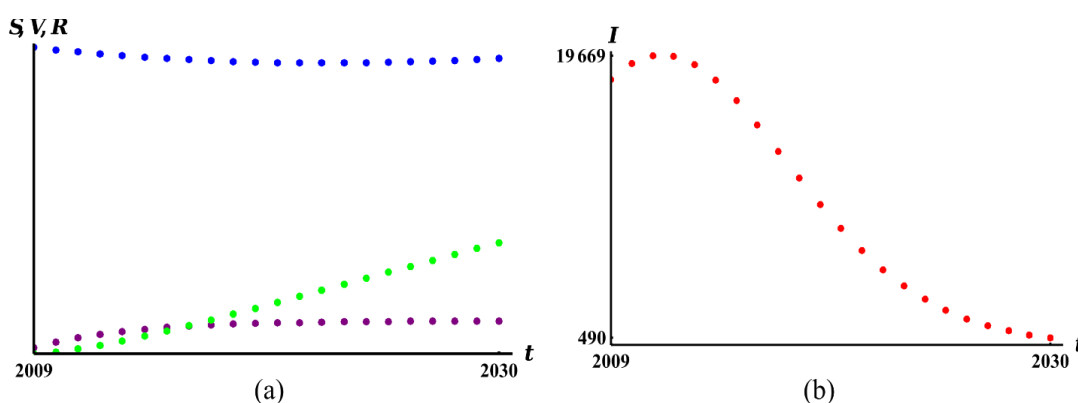
$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= 0.020123N - 1.087454 \frac{SI}{N} - 0.026793S, \\ \frac{dV}{dt} &= 0.019692S - 0.001220 \frac{VI}{N} - 0.173768V, \\ \frac{dI}{dt} &= 1.087454 \frac{SI}{N} + 0.001220 \frac{VI}{N} - 0.007101I \\ \frac{dR}{dt} &= 0.999728I + 0.166667V - 0.007101R, \end{aligned} \tag{2}$$

Nilai awal yang digunakan mengacu pada banyaknya individu masing-masing kelompok pada tahun 2009, yaitu

$$\begin{aligned} S(2009) &= 226870662, & V(2009) &= 4462822, \\ I(2009) &= 18055, & R(2009) &= 18053 \end{aligned} \tag{3}$$

Sistem persamaan diferensial (2) dengan nilai awal (3) selanjutnya ditentukan penyelesaiannya pendekatannya menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Penyelesaian pada tahun 2017 dan 2018 dibandingkan dengan data banyaknya individu kelompok S , V , I , dan R pada tahun 2017 dan 2018. Error relatif yang terjadi pada masing-masing kelompok individu berada pada interval $[-0.345474, 0.128112]$.

Penyelesaian model (2) dengan nilai awal (3) ditentukan untuk periode 22 tahun pertama (tahun 2009–2030). Penyelesaian tersebut menyatakan banyaknya individu masing-masing kelompok pada setiap tahunnya. Banyaknya individu masing-masing kelompok direpresentasikan dalam *scatter plot* yang ditunjukkan pada Gambar 1. Gambar tersebut menunjukkan pola penyebaran penyakit campak di Indonesia.



Gambar 1. *Scatter plot* banyaknya individu kelompok (a) S (biru), V (ungu), R (hijau), dan (b) I (merah) pada tahun 2009–2030

Dengan demikian, berdasarkan Gambar 1 pola penyebaran penyakit campak di Indonesia tahun 2009-2030: banyaknya individu kelompok S dan I menunjukkan *trend* turun, sedangkan banyaknya individu kelompok V dan R menunjukkan *trend* naik. Selain itu, dengan model (2) dan nilai awal (3), pada tahun 2030 masih terdapat 490 penderita campak di Indonesia. Ini berarti diperkirakan Indonesia belum bebas campak tahun 2030 sebagaimana yang ditargetkan *Sustainable Development Goals*.

D. Simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh empat kesimpulan sebagai berikut.

1. Model $SVIR$ untuk penyebaran penyakit menular yang diperoleh adalah (1), yaitu sistem persamaan diferensial nonlinear orde satu dengan variable bebas t dan empat variable terikat S , V , I , dan R .

2. Model *SVIR* pada penyebaran penyakit campak di Indonesia, yaitu sistem persamaan diferensial (2).
3. Pola penyebaran penyakit campak di Indonesia tahun 2009–2030: banyaknya individu yang sehat tetapi rentan terinfeksi penyakit dan terinfeksi penyakit menunjukkan *trend* turun, sedangkan banyaknya individu yang telah divaksin dan sembuh serta memperoleh kekebalan menunjukkan *trend* naik.
4. Berdasarkan penerapan, masih terdapat 490 penderita campak di Indonesia pada tahun 2030. Ini berarti diperkirakan Indonesia belum bebas campak tahun 2030.

E. Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini didanai oleh RKAT PTNBH Universitas Sebelas Maret Tahun Anggaran 2021 melalui skema penelitian hibah grup riset (penelitian hgr-uns) dengan Nomor Kontrak: 260/UN27.22/HK.07.00/ 2021. Oleh karenanya ucapan terima kasih dan penghargaan yang tinggi penulis ucapkan kepada LPPM UNS.

F. Daftar Pustaka

- Azizah, A., P. Widyaningsih, & D. R. S. Saputro. (2017). Spread of Ebola Disease with Susceptible Exposed Infected Isolated Recovered (SEII_hR) Model. *Journal of Physics: Conference Series* **855**, 012008 1–6. Doi:10.1088/1742-6596/855/1/012008
- Harianto, J. & T. Suparwati. (2017). Local Stability Analysis of an SVIR Epidemic Model. *Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, **5**, 20–28.
- Hethcote, H. W. (1983). Measles and Rubella in the United States. *American Journal of Epidemiology*, **117**, 2–13.
- Hethcote, H. W. (1989). Three Basic Epidemiological Models. *Applied Mathematical Ecology*, **18**, 119–144.
- Islam, S. (2015). Equilibriums and Stability of SVIR Epidemic Model. *International Journal of Humanities, Arts, Medicine and Sciences*, **3**, 1–10.
- Kementerian Kesehatan RI. (2012). *Petunjuk Teknis Surveilans Campak*. Jakarta: Direktorat Pengendalian Penyakit dan Penyehatan Lingkungan.
- Kristianto, W. dan P. Widyaningsih. (2019). Interpretasi Penyelesaian Model Susceptible Vaccinated Infected Recovered (SVIR) pada Penyakit Campak di Indonesia terhadap Target Indonesia Bebas Penyakit. Dipresentasikan pada Seminar Nasional Matematika XIII, Matematika FMIPA UNNES, Semarang, 19 Oktober 2019.

- Liu, X., S. Iwami, & Y. Takeuchi. (2008). SVIR Epidemic Models with Vaccination Strategies. *Theoretical Biology*, 253, 1–11.
- Pusat Data dan Informasi Kementerian Kesehatan RI. (2009-2018). *Profil Kesehatan Indonesia*. Jakarta: Kementerian Kesehatan Republik Indonesia.
- Sustainable Development Goals. (2020). Transforming Our World: The 2030 Agenda for Sustainable Development. Diakses dari <https://sustainabledevelopment.un.org> tanggal 10 Januari 2020.
- Sutanto, A. Azizah, P. Widyaningsih, & D. R. S. Saputro. (2017). SEIR_r: Drug Abuse Model with Rehabilitation. *Proceedings of the ICEMS2016 in Conjunction with 4th IPCSM2016, AIP Conf.Proc.*1847, 020018 1–6. doi:10.1063/1.4983873
- WHO. (2019a). Immunization and Vaccines. Diakses dari <https://www.who.int> tanggal 1 November 2019.
- WHO. (2019b). Reported Cases of Selected Vaccine Preventable Diseases (VPDs). Diakses dari <https://www.who.int> tanggal 20 Oktober 2019.
- WHO. (2019c). Infectious Diseases. Diakses dari <https://www.who.int> tanggal 4 Desember 2019.
- Widyaningsih, P., A. A. Nugroho, & D. R. S. Saputro. (2018a). Susceptible Infected Recovered Model with Vaccination, Immunity Loss, and Relapse to Study Tuberculosis Transmission in Indonesia, *AIP Conference Proceedings* 2014, 020121 1–6. Doi:10.1063/1.5054525
- Widyaningsih, P., A. A. Nugroho, D. R. S. Saputro, & Sutanto. (2019a). Tuberculosis Transmission with Relapse in Indonesia: Susceptible Vaccinated Infected Recovered Model. *Journal of Physics: Conference Series*, 1217, 012071 1–6. Doi:10.1088/1742-6596/1217/1/012071
- Widyaningsih, P., P. Candrawati, Sutanto, & D. R. S. Saputro. (2019b). Maternal Antibody Susceptible Vaccinated Infected Recovered (MSVIR) Model for Tetanus Disease and Its Applications in Indonesia. *Journal of Physics: Conference Series* 1306, 012002 1–7. doi:10.1088/1742-6596/1306/1/012002
- Widyaningsih, P., R. C. Affan, & D. R. S. Saputro. (2018b). A Mathematical Model for The Epidemiology of Diabetes Mellitus with Lifestyle and Genetic Factors. *Journal of Physics: Conference Series* 1028, 012110 1–6. doi:10.1088/1742-6596/1028/1/012110
- Widyaningsih, P., U. U. Zahra, V. Y. Kurniawan, Sutanto, & D. R. S. Saputro. (2019c). Susceptible Infected AIDS Treatment (SIAT) Model. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science* 243, 012047 1–6. Doi:10.1088/1755-1315/243/1/012047
- World Bank. (2019). Birth and Death Rate, Crude. Diakses dari <https://www.data.worldbank.org> tanggal 20 Oktober 2019.