Imajiner: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
ISSN (Online): 2685-3892
Vol. 8, No. 1, Januari 2026, Hal. 78-86
Available Online at journal.upgris.ac.id/index.php/imajiner

Pelabelan Anggun Super Pada Graf Tripartit Komplet $K_{1,m,n}$ Untuk $m, n \geq 1$

Dewa Made Krisna Dharma Putra[1], Putu Kartika Dewi[2], Nengah Suparta[3]
[1,2,3]Universitas Pendidikan Ganesha
[1]krisna.dharma@student.undiksha.ac.id

ABSTRAK

Sebuah graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dikatakan memiliki pelabelan anggun super jika terdapat fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ sedemikian hingga $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ untuk setiap sisi $uv \in E(G)$. Penelitian ini bertujuan untuk membuktikan bahwa graf tripartit komplet $K_{1,m,n}$ untuk $m, n \geq 1$ memiliki pelabelan anggun super. Metode yang digunakan adalah konstruksi langsung, dengan memberikan fungsi pelabelan yang memenuhi sifat-sifat pelabelan anggun super pada setiap titik dan sisi graf $K_{1,m,n}$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa untuk setiap nilai $m, n \geq 1$, graf $K_{1,m,n}$ dapat dilabeli secara anggun super dengan penentuan label yang sistematis.
Kata Kunci: Pelabelan Graf; Pelabelan Anggun Super; Graf Tripartit Komplet.

ABSTRACT

A graph G with a vertex set $V(G)$ and an edge set $E(G)$ is said to have a super graceful labeling if there exists a bijective function $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots |V(G)| + |E(G)|\}$ such that $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ for every edge $uv \in E(G)$. This study aims to prove that the complete tripartite graph $K_{1,m,n}$ for $m, n \geq 1$ admits a super graceful labeling. The method used is a direct construction by providing a labeling function that satisfies the properties of super graceful labeling for every vertex and edge of the graph $K_{1,m,n}$. The results show that for every value of $m, n \geq 1$, the graph $K_{1,m,n}$ can be labeled in a super graceful manner through a systematic labeling scheme.
Keyword: *Graph Labeling; Super Graceful Labeling; Complete Tripartite Graph.*

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang berkembang pesat pada masa kini dan memiliki peran penting dalam menyelesaikan berbagai permasalahan nyata melalui pendekatan pemodelan. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika memecahkan permasalahan Jembatan Königsberg. Sejak saat itu, teori graf terus dikembangkan dan diaplikasikan dalam berbagai bidang seperti ilmu komputer, ilmu jaringan, transportasi, hingga analisis data (Buhaerah dkk., 2022)

Salah satu topik penting dalam teori graf yang menjadi fokus perhatian para peneliti adalah pelabelan graf. Pelabelan graf didefinisikan sebagai sebuah fungsi yang memasangkan himpunan elemen-elemen graf dengan suatu himpunan bilangan (Kartika, 2022). Menurut Suparta & Ariawan (2020), pelabelan pada suatu graf adalah pemberian bilangan bulat tak negatif pada setiap titik (*vertex*) atau setiap sisi (*edge*), atau pada keduanya, dengan memenuhi syarat atau ketentuan tertentu. Penelitian tentang pelabelan graf pertama kali diprakarsai oleh Rosa pada tahun 1967. Beberapa jenis pelabelan yang banyak diteliti antara lain pelabelan anggun (graceful labeling), pelabelan ajaib (*magic labeling*), pelabelan anti-ajaib (*antimagic labeling*), dan pelabelan tidak teratur *(irregular labeling)* (Gallian, 2022). Hingga kini, penelitian terkait pelabelan graf semakin berkembang dengan berbagai variasi, seperti pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total yang memadukan keduanya. Tercatat lebih dari 1500 artikel telah membahas teori pelabelan graf, menunjukkan bahwa topik ini masih menjadi bidang penelitian yang sangat aktif.

Salah satu jenis pelabelan yang menarik adalah pelabelan anggun super (*super graceful labeling*). Pelabelan ini merupakan fungsi bijektif dari gabungan himpunan titik dan sisi graf G ke bilangan bulat positif sedemikian hingga setiap sisi $uv \in E(G)$ memiliki label yang sama dengan nilai mutlak selisih label kedua titik yang dihubungkannya. Graf yang memiliki pelabelan seperti ini disebut sebagai graf super graceful (Suparta & Ariawan 2018).

Beberapa penelitian sebelumnya telah mengeksplorasi pelabelan anggun super pada berbagai jenis graf. Penelitian yang dilakukan Hidaya (2021) meneliti pelabelan anggun super pada graf komplet, graf tripartit komplet, gabungan graf bintang, serta graf caterpillar. Kajian-kajian tersebut berfokus pada pembuktian eksistensi fungsi pelabelan super graceful dan menentukan syarat perlu serta syarat cukup bagi masing-masing jenis graf untuk memiliki pelabelan tersebut. Hasil penelitian ini menjadi dasar penting untuk mengembangkan metode konstruksi pelabelan anggun super pada graf-graf yang lebih kompleks serta memperluas aplikasi teori graf dalam pemodelan masalah nyata.

Penelitian ini secara khusus berfokus pada pelabelan super graceful pada Graf Tripartit Komplet $K_{1,\mathrm{m},n}$. Pelabelan pada graf ini memiliki karakteristik yang sangat menarik dan menantang. Pelabelan super graceful pada Graf Tripartit Komplet $K_{1,\mathrm{m},n}$ melibatkan penentuan label unik untuk setiap simpul dan sisi graf, dengan persyaratan bahwa himpunan angka pelabelannya membentuk barisan yang berurutan dari 1,2,3… dan seterusnya kemudian angka terahkirnya berhenti ketika mencapai gabungan dari titik dengan sisinya.

KAJIAN TEORI

Graf merupakan sebuah diagram yang terdiri atas sekumpulan titik (*vertex*) yang saling dihubungkan oleh garis-garis yang disebut sisi (*edge*). "Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf dengan himpunan titik V yang tidak kosong dan himpunan sisi E."(Suparta dkk., 2022). Vertex dapat dipahami sebagai titik, sedangkan edge merupakan garis yang menghubungkan dua titik tersebut. $V(G)$ disebut himpunan titik dari graf G dan $E(G)$ merupakan himpunan sisi dari graf G. Menurut Suparta dkk. (2025), untuk suatu graf $G(V, E)$ yang bersifat tak berarah, sederhana, dan berhingga, banyaknya simpul pada himpunan V dinotasikan dengan $| V |$, sedangkan banyaknya sisi pada himpunan E dinotasikan dengan $| E |$. Oleh karena itu Sebuah graf $G(V, E)$ adalah suatu sistem yang terdiri atas himpunan berhingga dan tidak kosong dari simpul-simpul $V(G)$, serta himpunan sisi-sisi $E(G)$ (Suparta dkk., 2023).

Graf tripartit komplet adalah graf sederhana yang himpunan titiknya dapat dibagi menjadi tiga himpunan bagian yaitu $V1$, $V2$, $V3$ sedemikian hingga terdapat sisi yang menghubungkan setiap titik di satu partisi dengan setiap titik di partisi lain. Jika kardinalitas $V1$, $V2$, dan $V3$ secara berturut-turut l, m dan n, maka graf tripartit komplet dilambangkan dengan K, l, m, n.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode konstruksi langsung (direct construction method). Metode ini dipilih karena sesuai dengan tujuan penelitian, yaitu untuk membuktikan eksistensi pelabelan anggun super pada graf tripartit komplet $K_{1,m,n}$ untuk setiap $m, n \geq 1$. Langkah-langkah penelitiannya dimulai dengan menentukan struktur graf. Pada tahap awal, ditetapkan bentuk graf tripartit komplet $K_{1,m,n}$ yang terdiri dari tiga himpunan titik $V1 = \{v1\}, V_2 = \{v_2, v_3, \dots, v_m\}\ dan\ V_3 = \{v_{m+1}, \dots, v_n\}$ dengan seluruh sisi menghubungkan titik-titik dari himpunan yang berbeda. Selanjutnya menentukan fungsi pelabelan. Kemudian ditetapkan fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, | V(G)| + |E(G) |\}$ sedemikian hingga setiap sisi $uv \in E(G)$memenuhi sifat $f(uv) =| f(u) - f(v) |$. Kemudian menentukan aturan pemberian label titik. Pemberian label titik dilakukan secara sistematis agar perbedaan nilai label antara dua titik yang terhubung menghasilkan nilai unik untuk setiap sisi.

Untuk menentukan label sisi, berdasarkan hasil pelabelan titik, kemudian diturunkan label sisi dengan menggunakan persamaan pelabelan anggun super. Setiap label sisi harus bernilai unik dan berada dalam himpunan bilangan bulat positif yang tidak melebihi $|V(G)| + |E(G)|$. setelah itu melakukan verifikasi sifat pelabelan anggun super. Setelah fungsi pelabelan ditetapkan, dilakukan pembuktian bahwa fungsi tersebut memenuhi semua syarat pelabelan anggun super, yaitu: fungsi bersifat bijektif, setiap nilai $f(uv)$ berbeda untuk setiap sisi, dan semua label sisi berasal dari hasil selisih label dua titik yang terhubung.

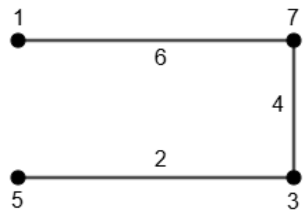
Metode konstruksi langsung ini juga digunakan oleh Suparta (2020) dalam pembuktian pelabelan pada beberapa tipe graf rantai, serta oleh Dewi dan Suparta (2024) dalam penelitian struktur kombinatorial pada graf berbasis aljabar.

PEMBAHASAN

Definisi Pelabelan Super Graceful

Misalkan G adalah sebuah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, dimana banyaknya titik adalah $p = |V(G)|$ dan banyaknya sisi adalah $q = |E(G)|$. Pelabelan super graceful pada G didefinisikan sebagai suatu fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,p+q\}$ sedemikian hingga, untuk setiap sisi $uv \in E(G)$ berlaku $f(uv) = |f(u)| - |f(v)|$. Jika terdapat graf G yang memenuhi syarat pelabelan tersebut maka G disebut graf super graceful.

Contoh 1.1: pelabelan super graceful dapat dilihat pada gambar berikut ini.



Gambar 1. Contoh Pelabelan Super Graceful

Berikut ditunjukkan suatu subkelas dari graf tripartit komplet merupakan graf anggun super

Teorema 1.1:

Untuk $m, n \geq 1$ graf tripartit komplet $K_{1,m,n}$ adalah graf anggun super

Bukti:

Misalkan

$$V(K_{1,m,n}) = \{u, v_1, v_2, \ldots v_m, w_{1,} w_2, \ldots w_n\}$$

dan

$$E(K_{1,m,n}) = \{uv_i, 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_i w_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{uw_j, 1 \leq j \leq n\}$$

Maka

$\left[V(K_{1,m,n})\right] = 1 + m + n$ dan $\left[E(K_{1,m,n})\right] = m + n + mn$

Selanjutnya, konstruksi pelabelan f pada graf tripartit $K_{1,m,n}$ sebagai berikut,

$$f: V(K_{1,m,n}) \cup E(K_{1,m,n}$$

$g) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,(1+m+n)+(m+n+mn)\}$

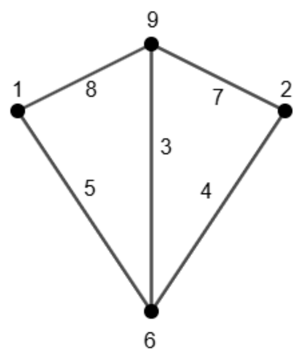
$f: V(K_{1,m,n}) \cup E(K_{1,m,n}) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,(1+2(m+n)+mn)\}$

Sehingga

$f(u) = 1 + 2(m + n) + (mn)$
$f(vi) = i, untuk\ i = 1, 2, 3, \ldots, m$
$f(uw_j) = m + 1 + (n - j)(m + 2)$, untuk $j = 1,2,3\ \ldots, n$
$f(w_j) = m + j(m + 2)$, untuk $j = 1,2,3\ \ldots, n$
$f(uv_i) = 1 + 2(m + n) + mn - i$, untuk $i = 1,2,3\ \ldots, m$
$f(v_i w_j) = (m + j(m + 2)) - i$, untuk $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$
Perhatikan bahwa, $\forall x, y \in V(K_{1,m,n}) \cup E(K_{1,m,n}), x \neq y$, maka $f(x) \neq f(y)$. Ini berarti fungsi f injektif. Dan himpunan semua fungsi f yaitu $f(u), f(vi), f(uw_j), f(w_j), f(uv_i)$, $f(v_i w_j)$ adalah $\{1,2,3, \ldots, (1 + 2(m + n) + mn)\}$ sehingga $R_f =$ kodomain f. Ini berarti fungsi f surjektif. Karena fungsi f injektif dan surjektif, maka fungsi f merupakan fungsi bijektif
Selanjutnya ditunjukkan fungsi f $memenuhi$ definisi Pelabelan Super Gracefull.
Untuk sisi $uv_i \in E(K_{1,m,n}),\ i = 1,2,3\ \ldots, m$; berlaku
$f(uv_i) = 1 + 2(m + n) + mn - i = |(1 + 2(m + n) + mn) - (i)| = |f(u) - f(v_i)|$
Untuk sisi $v_i w_j \in E(K_{1,m,n}),\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$; berlaku
$f(v_i w_j) = (m + j(m + 2)) - i = |(i) - (m + j(m + 2)| = |f(v_i) - f(w_j)|$
Untuk sisi $uw_j \in E(K_{1,m,n}),\ j = 1,2,3\ \ldots, n$; berlaku
$f(uw_j) = m + 1 + (n - j)(m + 2)$
$|f(u) - f(w_j)| = |(1 + 2(m + n) + (mn) - (m + j(m + 2))| = |1 + 2m + 2n + mn - m - jm - 2j| = |(2m - m) + 1 + (n - j)(m + 2)| = |m + 1 + (n - j)(m + 2)|$. Maka $f(uw_j) = |f(u) - f(w_j)|$
Jadi, untuk setiap sisi $xy \in E(K_{1,m,n})$, diperoleh
$f(xy) = |f(x) - f(y)|$
Karena fungsi f adalah bijektif dan memenuhi definisi pelabelan super graceful, maka graf $K_{1,m,n}$ merupakan graf super gracefull. Dengan demikian, teorema terbukti.

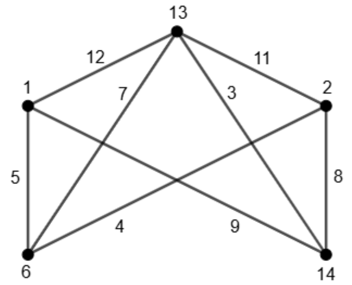
Contoh:

Pembuktian Konstruksi Pelabelan Super Graceful Pada Graf Tripartit Komplet $K_{1,2,1}$ Untuk $m, n \geq 1$



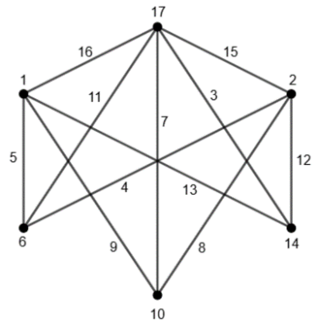
Gambar 2. Graf $Tripartit\ K_{1,2,1}$

Graf $Tripartit\ K_{1,2,1}$ memiliki titik sebanyak $|V| = 4$ dan sisi sebanyak $|E| = 5$. Kemudian graf tersebut diberikan label pada titik-titiknya sehingga memenuhi fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3, \ldots, |V| + |E|\}$. Untuk mencari setiap sisi $uv \in E(G)$berlaku $f(uv) = |f(u)| - |f(v)|$. Terlihat pada gambar di atas pelabelan setiap titiknya berbeda dengan pelabelan sisinya, dimana gabungan dari pelabelan titik dan pelabelan sisinya membentuk himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.Dengan demikian, Graf $Tripartit\ K_{1,2,1}$ terbukti memiliki pelabelan super graceful.



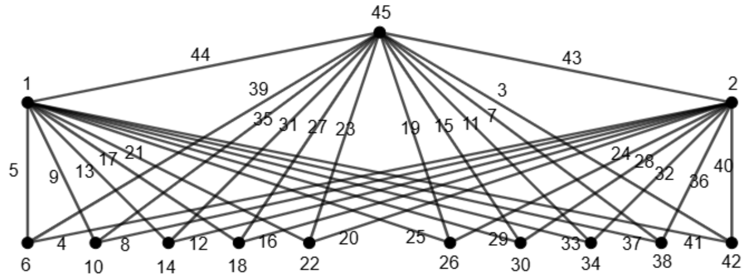
Gambar 3. Graf Tripartit $K_{1,2,2}$

Graf Tripartit $K_{1,2,2}$ memiliki titik sebanyak $|V| = 5$ dan sisi sebanyak $|E| = 8$. Kemudian graf tersebut diberikan label pada titik-titiknya sehingga memenuhi fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1,2,3, \dots, |V| + |E|\}$. Untuk mencari setiap sisi $uv \in E(G)$berlaku $f(uv) = |f(u)| - |f(v)|$. Terlihat pada gambar di atas pelabelan setiap titiknya berbeda dengan pelabelan sisinya, dimana gabungan dari pelabelan titik dan pelabelan sisinya membentuk himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}. Dengan demikian, Graf $Tripartit\ K_{1,2,2}$ terbukti memiliki pelabelan super graceful.



Gambar 4. Graf Tripartit $K_{1,2,3}$

Graf Tripartit $K_{1,2,3}$ memiliki titik sebanyak $|V| = 6$ dan sisi sebanyak $|E| = 11$. Kemudian graf tersebut diberikan label pada titik-titiknya sehingga memenuhi fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1,2,3, \dots, |V| + |E|\}$. Untuk mencari setiap sisi $uv \in E(G)$berlaku $f(uv) = |f(u)| - |f(v)|$. Terlihat pada gambar di atas pelabelan setiap titiknya berbeda dengan pelabelan sisinya, dimana gabungan dari pelabelan titik dan pelabelan sisinya membentuk himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17}. Dengan demikian, Graf $Tripartit\ K_{1,2,3}$ terbukti memiliki pelabelan super graceful.



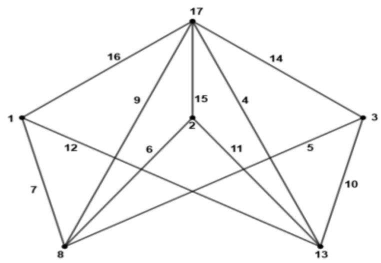
Gambar Graf $K_{1,2,10}$

Graf Tripartit $K_{1,2,10}$ memiliki titik sebanyak $|V| = 13$ dan sisi sebanyak $|E| = 32$. Kemudian graf tersebut diberikan label pada titik-titiknya sehingga memenuhi fungsi bijektif

$f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3, \ldots, |V| + |\mathrm{E}|\}$. Untuk mencari setiap sisi $uv \in E(G)$berlaku $f(uv) = |f(u)| - |f(v)|$. Terlihat pada gambar di atas pelabelan setiap titiknya berbeda dengan pelabelan sisinya, dimana gabungan dari pelabelan titik dan pelabelan sisinya membentuk himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45}. Dengan demikian, Graf $Tripartit\ K_{1,2,10}$ terbukti memiliki pelabelan super graceful.

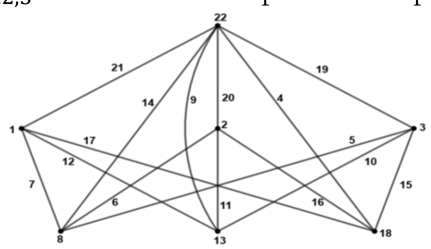
Gambar Graf $K_{1,3,1}$

Graf Tripartit $K_{1,2,3}$ memiliki titik sebanyak $|V| = 5$ dan sisi sebanyak $|\mathrm{E}| = 7$. Kemudian graf tersebut diberikan label pada titik-titiknya sehingga memenuhi fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3, \ldots, |V| + |\mathrm{E}|\}$. Untuk mencari setiap sisi $uv \in E(G)$berlaku $f(uv) = |f(u)| - |f(v)|$. Terlihat pada gambar di atas pelabelan setiap titiknya berbeda dengan pelabelan sisinya, dimana gabungan dari pelabelan titik dan pelabelan sisinya membentuk himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Dengan demikian, Graf $Tripartit\ K_{1,2,3}$ terbukti memiliki pelabelan super graceful.



Gambar Graf $K_{1,3,2}$

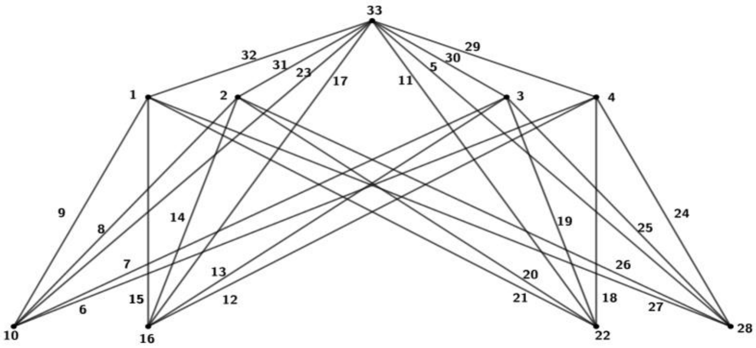
Graf Tripartit $K_{1,2,3}$ memiliki titik sebanyak $|V| = 6$ dan sisi sebanyak $|\mathrm{E}| = 11$. Kemudian graf tersebut diberikan label pada titik-titiknya sehingga memenuhi fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3, \ldots, |V| + |\mathrm{E}|\}$. Untuk mencari setiap sisi $uv \in E(G)$berlaku $f(uv) = |f(u)| - |f(v)|$. Terlihat pada gambar di atas pelabelan setiap titiknya berbeda dengan pelabelan sisinya, dimana gabungan dari pelabelan titik dan pelabelan sisinya membentuk himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17}. Dengan demikian, Graf $Tripartit\ K_{1,2,3}$ terbukti memiliki pelabelan super graceful.



Gambar Graf $K_{1,3,3}$

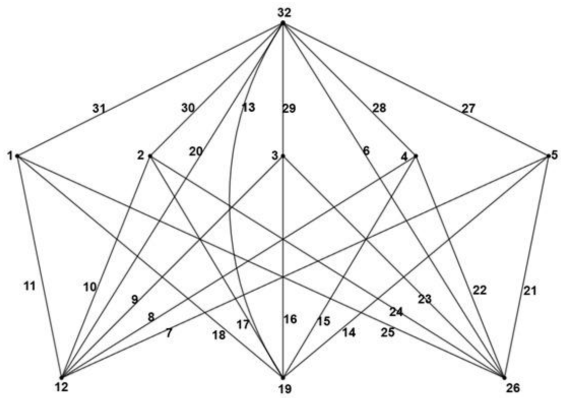
Graf Tripartit $K_{1,2,3}$ memiliki titik sebanyak $|V| = 7$ dan sisi sebanyak $|\mathrm{E}| = 15$. Kemudian graf tersebut diberikan label pada titik-titiknya sehingga memenuhi fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3, \ldots, |V| + |\mathrm{E}|\}$. Untuk mencari setiap sisi $uv \in E(G)$berlaku

$f(uv) = |f(u)| - |f(v)|$. Terlihat pada gambar di atas pelabelan setiap titiknya berbeda dengan pelabelan sisinya, dimana gabungan dari pelabelan titik dan pelabelan sisinya membentuk himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22}. Dengan demikian Graf $Tripartit\ K_{1,2,3}$ terbukti memiliki pelabelan super graceful.



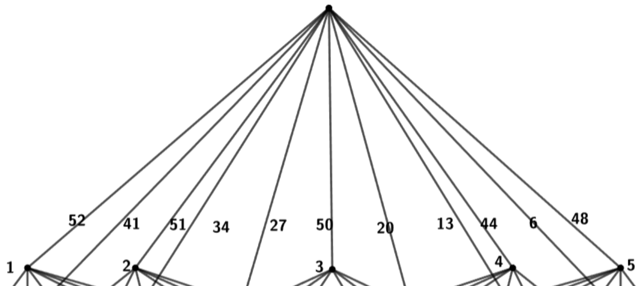
Gambar Graf $K_{1,4,4}$

Graf Tripartit $K_{1,2,3}$ memiliki titik sebanyak $|V| = 9$ dan sisi sebanyak $|E| = 24$. Kemudian graf tersebut diberikan label pada titik-titiknya sehingga memenuhi fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, |V| + |E|\}$. Untuk mencari setiap sisi $uv \in E(G)$berlaku $f(uv) = |f(u)| - |f(v)|$. Terlihat pada gambar di atas pelabelan setiap titiknya berbeda dengan pelabelan sisinya, dimana gabungan dari pelabelan titik dan pelabelan sisinya membentuk himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33}. Dengan demikian Graf $Tripartit\ K_{1,2,3}$ terbukti memiliki pelabelan super graceful.



Gambar Graf $K_{1,4,4}$

Graf Tripartit $K_{1,2,3}$ memiliki titik sebanyak $|V| = 9$ dan sisi sebanyak $|E| = 23$. Kemudian graf tersebut diberikan label pada titik-titiknya sehingga memenuhi fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, |V| + |E|\}$. Untuk mencari setiap sisi $uv \in E(G)$berlaku $f(uv) = |f(u)| - |f(v)|$. Terlihat pada gambar di atas pelabelan setiap titiknya berbeda dengan pelabelan sisinya, dimana gabungan dari pelabelan titik dan pelabelan sisinya membentuk himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32}. Dengan demikian Graf $Tripartit\ K_{1,2,3}$ terbukti memiliki pelabelan super graceful.



Gambar Graf $K_{1,4,3}$

Graf Tripartit $K_{1,2,3}$ memiliki titik sebanyak $|V| = 12$ dan sisi sebanyak $|\mathrm{E}| = 41$. Kemudian graf tersebut diberikan label pada titik-titiknya sehingga memenuhi fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, |V| + |\mathrm{E}|\}$. Untuk mencari setiap sisi $uv \in E(G)$berlaku $f(uv) = |f(u)| - |f(v)|$. Terlihat pada gambar di atas pelabelan setiap titiknya berbeda dengan pelabelan sisinya, dimana gabungan dari pelabelan titik dan pelabelan sisinya membentuk himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53}. Dengan demikian Graf $Tripartit\ K_{1,2,3}$ terbukti memiliki pelabelan super graceful.

PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas, disimpulkan hal-hal berikut: Graf $Tripartit\ K_{1,m,n}$ untuk m,n ≥ 1 merupakan graf dengan pelabelan super graceful. Pada graf $Tripartit\ K_{1,2,10}$ banyak titik adalah $\lceil V(K_{1,m,n}) \rceil = 1 + m + n$ dan banyak sisi adalah $\lceil E(K_{1,m,n}) \rceil = m + n + mn$. Konstruksi pelabelan f pada graf tripartit komplet graf tripartit komplet $K_{1,m,n}$ yaitu, $f: V(K_{1,m,n}) \cup E(K_{1,m,n}) \rightarrow \{1,2,3, \dots, (1 + 2(m + n) + mn)\}$. Pelabelan tersebut bersifat bijektif dan memenuhi syarat $f(uv) = |f(u)| - |f(v)|$ untuk setiap sisi $uv \in E(G)$. Dengan demikian, graf tripartit komplet $\mathrm{K}_{1,\mathrm{m},\mathrm{n}}$ untuk m,n ≥ 1 untuk terbukti merupakan graf super graceful.

Saran

Penelitian mengenai pelabelan super graceful masih dapat dikembangkan lebih lanjut pada jenis graf tripartit komplet lainnya, misalnya pada graf $K_{2,m,n}$, $K_{3,m,n}$, maupun $K_{4,m,n}$ dapat digeneralisasi untuk graf tripartit komplet dengan ukuran partisi yang lebih besar.

REFERENSI

Buhaerah, B., Busrah, Z., & Sanjaya, H. (2022). Teori graf dan aplikasinya. LSQ Makassar. ISBN 978-602-1308-54-7.

Dewi, P. K., & Suparta, I. N. (2024). Algebraic Structures and Combinatorial Properties of Unit Graphs in Rings of Integer Modulo with Specific Orders. *Eigen Mathematics Journal*, 7(1), 45–53.

Gallian, J. A. (2000). A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*. https://doi.org/10.37236/11668

Hidayah, A. N., & Budayasa, I. K. (2021). Pelabelan Anggun Super Pada Graf Komplet, Tripartit Komplet, Gabungan Bintang, Dan Caterpillar. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika, 9*(1), 116-125.

Kartika, P. D. (2022). Cn⊙mK1C_n \odot mK_1Cn⊙mK1. InPrime: Indonesian *Journal of Pure and Applied Mathematics,* 4(2), 160–169.https://doi.org/10.15408/inprime.v4i2.26935

Suparta, I. N. (2020). Pelabelan Graceful pada Beberapa Tipe Graf Rantai. *Indonesian Journal of Combinatorics, 4*(2), 112–119.

Suparta, I. N., & Ariawan, I. D. M. A. (2020). Expanding Graceful Tree*s. Electronic Journal of Graph Theory and Applications, 8*(2), 217–232.

Suparta, I. N., & Ariawana, I. D. M. A. (2018). Some methods for constructing some classes of graceful uniform trees. *Journal of Combinatorics*, 2(2), 123–135.

Suparta, I. N., Lin, Y., Hasni, R., & Budayana, I. N. (2025). On odd-graceful coloring of graphs. *Communications in Combinatorics and Optimization*, 10(2), 335–354. https://doi.org/10.22049/cco.2023.28736.1692

Suparta, I. N., Novitarisa, A. A. A. D., & Suharta, I. G. P. (2022). Graceful Labeling of Some Join Graphs. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika*. https://journal.unesa.ac.id/index.php/jram

Suparta, I. N., Venkathacalam, M., Gunadi, I. G. A., & Pratama, P. A. C. (2023). Graceful chromatic number of some Cartesian product graphs. *Ural Mathematical Journal*, *9*(2), 193–208. https://doi.org/10.15826/umj.2023.2.016