Jurnal Lontar Physics Today
Vol. 3 No. 3 November 2024, p 111 – 119
e-ISSN 2828-0970
Available Online at http://journal.upgris.ac.id/index.php/UPT
DOI: 10.26877/lpt.v3i3.21849

Pendekatan Numerik Gerak Kinematika Pendulum Ganda

R A Saputra[1,2], **J Saefan**[1] **dan J Siswanto**
[1]Program Studi Pendidikan Fisika Universitas PGRI Semarang, Jl. Lontar No. 1 Semarang

[1]E-mail: apriliyantosaputra61@gmail.com

Abstrak. Pendulum ganda merupakan sistem dinamika nonlinier yang menarik dalam fisika dan matematika karena perilakunya kompleks dan peka terhadap kondisi awal. Tujuan utama dari penelitian ini adalah untuk menyelesaikan secara analitis persamaan gerak sistem pendulum ganda. Pada penelitian ini menggunakan pendekatan numerik untuk mempelajari kinematika bandul ganda dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde keempat. Metode ini dipilih karena menawarkan keseimbangan yang baik antara akurasi dan efisiensi komputasi. Hasilnya menunjukkan bahwa pendekatan numerik memungkinkan kita untuk memvisualisasikan karakteristik perilaku kacau sistem pendulum ganda, mengungkapkan pola dinamis yang tidak dapat dijelaskan dengan pendekatan analitis tradisional. Studi ini memberikan wawasan baru mengenai aplikasi numerik untuk pemodelan fenomena fisik yang kompleks..

Kata kunci: pendulum, lagrangian,chaos.

Abstract. Double pendulum is an interesting nonlinear dynamics system in physics and mathematics because its behavior is complex and sensitive to initial conditions. The main objective of this research is to solve analytically the equations of motion of the double pendulum system. In this research, a numerical approach is used to study the kinematics of the double pendulum by using the fourth-order Runge-Kutta method. This method was chosen because it offers a good balance between accuracy and computational efficiency. The results show that the numerical approach allows us to visualize the characteristics of the chaotic behavior of the double pendulum system, revealing dynamic patterns that cannot be explained by traditional analytical approaches. This study provides new insights into the application of numerics for modeling complex physical phenomena.

Keywords: pendulum, lagrangian, chaos

1. Pendahuluan

Pendulum ganda merupakan suatu sistem dinamika nonlinier yang telah lama menjadi sebuah objek penelitian yang menarik dalam bidang fisika dan matematika. Sistem ini terdiri dari dua buah bandul yang dihubungkan secara seri, dengan bandul kedua dipasang pada ujung bandul pertama. Meskipun pendulum ganda terlihat sederhana, namun perilakunya sangat kompleks dan dapat menyebabkan gerakan kacau dalam kondisi tertentu. Sifat nonlinier ini menjadikan pendulum ganda sebagai model ideal untuk mempelajari berbagai fenomena fisik, mulai dari getaran sederhana hingga teori chaos [1]. Perilaku sistem pendulum yang kacau ini merupakan salah satu sifat menariknya. Misalnya pendulum ganda sangat sensitif terhadap kondisi awal. Perubahan kecil pada posisi atau kecepatan awal dapat menyebabkan perbedaan lintasan yang sangat besar seiring dengan berjalannya waktu.

Perilaku pendulum ganda yang sangat sensitif terhadap kondisi awal menjadi suatu sistem yang menarik untuk dipelajari khususnya pada pemodelan dan pengendalian sistem dinamik klasik. Sistem ini sering menggunakan metode mekanika klasik seperti persamaan Lagrangian, yang didasarkan pada prinsip energi sistem [2]. Sistem ini telah dipelajari selama beberapa dekade dan telah membuat para peneliti terpesona karena relevansinya dengan berbagai aplikasi praktis, termasuk robotika dan analisis getaran struktural. Dalam fisika, pendekatan lagrangian sangat penting karena memungkinkan penyederhanaan masalah mekanis dengan menggunakan prinsip energi, bukan gaya [3]. Mekanika Lagrangian sangat berguna ketika berhadapan dengan sistem yang kompleks, terutama sistem yang koordinatnya terbatas dan derajat kebebasannya banyak. Persamaan Lagrangian didefinisikan sebagai perbedaan antara energi kinetik dan energi potensial dan digunakan untuk menentukan besarnya gaya yang bekerja pada suatu benda. Akan tetapi, untuk sistem persamaan yang sederhana, persamaan gerak dapat diselesaikan secara analitik untuk nilai kondisi awal tertentu. Tetapi untuk sistem, yang rumit, persamaan gerak perlu diselesaikan secara numerik.

Metode utama untuk menganalisis sistem ini adalah pendekatan numerik. Metode numerik dapat digunakan untuk mensimulasikan perilaku suatu sistem untuk kondisi dan parameter awal yang berbeda. Berbagai metode numerik telah dikembangkan dan diterapkan, mulai dari metode Euler sederhana hingga metode yang lebih canggih seperti Runge-Kutta adaptif dan metode sederhana yang melestarikan konservasi energi. Metode Runge-Kutta orde keempat telah terbukti menjadi pilihan yang efektif karena memberikan keseimbangan yang baik antara akurasi dan efisiensi komputasi [4]. Penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa metode numerik dapat mengungkap pola dinamis yang tidak dapat dijelaskan dengan pendekatan analitis tradisional. Selain itu, metode ini memungkinkan visualisasi karakteristik perilaku kacau dari sistem pendulum ganda. Pendekatan numerik merupakan metode yang sangat penting untuk menganalisis sistem ini.

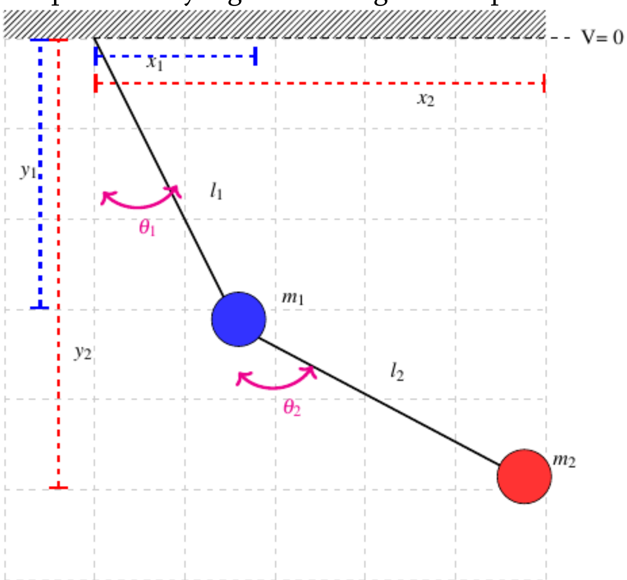
Dalam penelitian pada artikel ini bertujuan untuk mempelajari kinematika bandul ganda dengan menggunakan pendekatan numerik. Penelitian ini tidak hanya melibatkan pengembangan model matematika tetapi juga melakukan simulasi untuk mempelajari dinamika gerak sistem secara detail. Pendekatan ini bertujuan untuk memberikan wawasan baru untuk aplikasi numerik dalam pemodelan fenomena fisik yang kompleks. Dapatkan persamaan gerak sistem pegas-pendulum berpasangan menggunakan persamaan Lagrangian. Pertama, penulis memilih derajat kebebasan (*Degree of Freedom*) yang mewakili sistem. Setiap batasan mengurangi jumlah derajat kebebasan sebanyak satu. Sebuah sistem di mana N partikel bergerak secara independen satu sama lain memiliki $3N$ derajat kebebasan. Dan jika pergerakannya dibatasi oleh k kondisi batas, maka jumlah derajat kebebasan sebenarnya dirumuskan sebagai:

$$Df = 3N - K \tag{1}$$

Dari hasil perhitungan derajat kebebasan, maka dapat digunakan untuk mencari koordinat umum yang akan digunakan sebagai acuan dalam mencari hasil akhir dari pendulum ganda dengan meetode Lagrangian. Perangkat lunak yang digunakan adalah bahasa pemrograman phyton, yang merupakan bahasa pemrograman untuk komputasi numerik yang sangat baik dalam perhitungan dan dapat menampilkan grafik, sehingga lebih mudah digunakan.

2. Deskripsi Fisik Sistem

Pendulum ganda adalah suatu sistem mekanika klasik yang terdiri dari dua buah massa atau bob dengan pendulum pertama memmiliki panjang tali l_1 dan massa m_1. Pada pendulum kedua yang terikat pada pendulum pertama akan memiliki panjang tali l_2 dan massa m_2. Sudut yang dibuat oleh pendulum pertama dengan garis vertikal yang ditarik dari 0 diwakili oleh θ_1 dan sudut yang dibuat oleh pendulum kedua dengan garis vertikal yang ditarik dari m_1 diwakili oleh θ_2, di mana sudut berlawanan arah jarum jam adalah positif. Jika mengatur sistem ini dalam bidang xy dengan 0 sebagai titik asal, maka dapat menemukan posisi massa. Pada saat membiarkan posisi x dari m_1 menjadi x_1 dan posisi y dari m_1 menjadi y_1. Posisi x dan y dari m_2 akan menjadi x_2 dan y_2. Ini memberi daftar variabel dan parameter yang sesuai dengan label pada ilustrasi gambar 1:



Gambar 1. Sistem Pendulum Ganda.

Kemudian untuk persamaan Lagrangian (L) suatu sistem adalah selisih antara energi kinetik sistem dan energi potensial. Persamaan lagrange dapat dituliskan dengan sebagai berikut:

$$L = T - V \tag{2}$$

Dimana dapat diketahui bahwa T adalah energi kinetik sistem dan V adalah energi potensial sistem. Dengan menggunakan sistem koordinat umum θ_1 dan θ_2 untuk memenetukan kecepatan dan posisi dari kedua bandul pada sistem. Sebagai hasil dari sitem pendulum ganda, T dari kedua massa pendulum dapat ditulis menurut persamaan:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)L_1^2\dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}m_2L_2^2\dot{\theta_2}^2 + m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2cos(\theta_1 - \theta_2) \tag{3}$$

Sedangkan untuk V pada sistem pendulum ganda dapat dituliskan dengan persamaan:

$$V = -(m_1 + m_2)gL_1cos\theta_1 - m_2gL_2cos\theta_2 \quad (4)$$

Dari persamaan (3) dan (4), dapat di substitusikan untuk mendapatkan L yang dituliskan dengan persamaan:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)L_1^2\dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}m_2L_2^2\dot{\theta_2}^2 + m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gL_1cos\theta_1 - m_2gL_2cos\theta_2 \quad (5)$$

3. Metode

Metode yang digunakan untuk penelitian ini adalah kajian pustaka dengan menggunakan beberapa sumber literatur seperti Google Scholar dan ScienceDirect. Penelitian ini dilakukan dengan melakukan kajian pada artikel atau jurnal yang berkaitan dengan pendulum ganda. Tahapan yang dilakukan yaitu dengan studi literatur, pengumpulan informasi terkait pendulum ganda, melakukan analisis dan menuliskan kesimpulan.

Studi literatur dilakukan dengan mengumpulkan literatur yang berhubungan dengan topik baik mengenai persamaan Lagrange dan persamaan diferensial pada pendulum ganda. Analisis dilakukan dengan mengumpulkan semua informasi penting yang akan digunakan dalam penelitian. Kemudian mengkonstruksi model pendulum ganda dengan membandingkan persamaan lagrangian untuk menganalisis persamaan gerak sehingga ditemukan persamaan diferensial. Kemuadian melakukan analisis numerik menggunakan metode Runge-kutta orde 4. Menuliskan kesimpulan dilakukan dengan mearik garis besar dari semua sumber literatur yang sudah ditemukan dan dari semua tahap yang sudah dilakukan hingga menemukan persamaan numerik yang dicari.

4. Euler-Lagrange dan Runge-kutta

Pemodelan gerak pendulum ganda dapat dilakukan dengan menggunakan metode Euler-Lagrange. Persamaan Lagrange didefinisikan sebagai selisih antara energi kinetik dan energi potensial dan digunakan untuk mengetahui besar gaya yang bekerja pada benda [5]. Secara umum metode lagrange dapat dituliskaan pada persamaan (2). Sehingga persamaan lagrange pada sistem dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \quad (6)$$

Persamaan lagrange bergantung pada jumlah variabel terikatnya. Pada pendulum ganda memiliki dua derajat kebebasan (θ_1) dan (θ_2) dengan masing-masing variabel pada pendulum ganda diturunkan kepersamaan diferenisal.

Persamaan diferensial merupakan persamaan matematika yang melibatkan suatu fungsi, variabel bebas, dan turunan dari fungsi tersebut. Persamaan ini sangat penting dalam berbagai disiplin ilmu, seperti fisika, teknik, dan ekonomi, karena banyak fenomena alam dapat dimodelkan menggunakan persamaan diferensial. Oleh karena itu, untuk menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik dapat digunakan metode Runge-kutta orde 4. Metode ini sering digunakan karena dapat menghasilkan solusi yang akurat dengan efisiensi komputasi yang baik. Dalam konteks pendulum ganda, metode ini menjadi alat penting untuk menganalisis dinamika sistem yang kompleks. Metode Runge-Kutta dikembangkan dengan menyempurnakan metode sebelunya yaitu metode Euler yang merupakan metode dasar penyelesaian persamaan diferensial biasa. Metode Euler hanya menggunakan informasi dari titik awal untuk memperkirakan nilai berikutnya, sedangkan metode Runge-Kutta menggunakan evaluasi beberapa fungsi pada interval langkah untuk meningkatkan keakuratan solusi.

Metode Runge-kutta menggunakan empat tahapan perhitungan dalam setiap langkah. Jika ada suatu persamaan differensial:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{7}$$

Sehingga untuk memperoleh empat konstanta dapat dirumuskan dengan:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{8}$$

Dimana suku-suku pada persamaan tersebut antara lain:

$$k_1 = hf(t_n - y_n) \tag{9}$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \tag{10}$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \tag{11}$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3) \tag{12}$$

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan metode Runge-kutta untuk menyelesaikan persamaan diferensial pada pendulum ganda. Dengan menggunakan metode ini menghasilkan deviasi yang signifikan dari solusi eksak setelah interval waktu tertentu. Ketika sistem berada dalam mode chaos, di mana trajectory sistem sangat sensitif terhadap perubahan kecil dalam perhitungan, hal ini menjadi semakin penting.

5. Hasil dan Pembahasan

Hasil dari posisi x dan y dari dan transformasi θ_1 dan θ_2 massa pendulum ganda:

$$x_1 = L_1 \cos\theta_1 \tag{13}$$

$$y_1 = -L_1 \cos\theta_1 \tag{14}$$

$$x_2 = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin\theta_2 \tag{15}$$

$$y_2 = -L_1 \cos\theta_1 - L_2 \cos\theta_2 \tag{16}$$

Pada koordinat kartesian, energi kinetik (T) pada sistem pendulum ganda dapat dituliskan dengan persamaan:

$$T = \frac{1}{2} m_x L_1^2 \dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta_2}^2 + m_2 L_x \dot{\theta_1}^2 \dot{\theta_2}^2 b \tag{17}$$

Dengan $m_x = (m_1 + m_2)$, $L_x = L_1 L_2$, $a = \sin(\theta_1 + \theta_2)$, dan $b = \cos(\theta_1 + \theta_2)$. Kemudian, untuk nilai enerhi potensial (V) pada sistem pendulum ganda dituliskan dengan persamaan:

$$V = -m_x g L_1 \cos\theta_1 - m_2 g L_2 \cos\theta_2 \tag{18}$$

Dari persamaan energi kinetik dan energi potensial yang sudah diketahui, maka untuk persamaan Lagrange dapat dituliskan dengan subsutitusi persamaan (17) dan (18) sesuai dengan persamaan (2). Dapat dituliskan dengan:

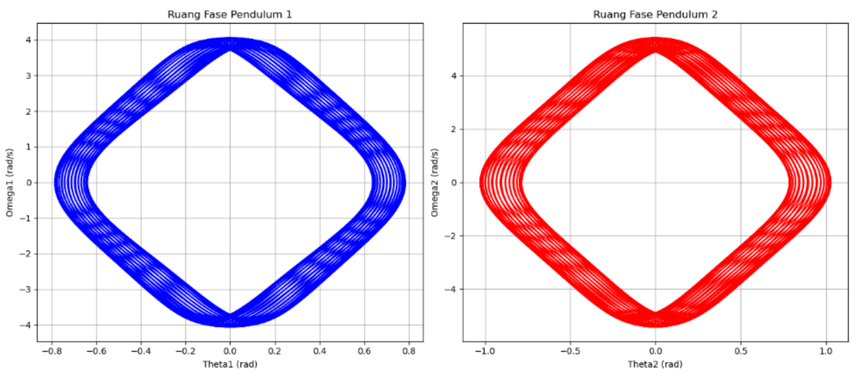
$$L = \frac{1}{2} m_x L_1^2 \dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta_2}^2 + m_2 L_x \dot{\theta_1}^2 \dot{\theta_2}^2 b + m_x g L_1 \cos\theta_1 - m_2 g L_2 \cos\theta_2 \tag{19}$$

Persamaan Euler-Lagrange dapat diperoleh dengan memasukkan persamaan lagrange (19) pada persamaan (6). Maka untuk persamaan Euler-Lagrange dapat didefinisikan menurut persamaan:

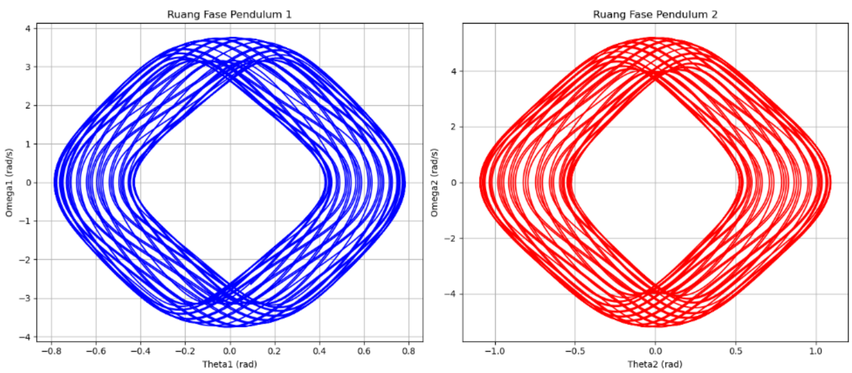
$$\ddot{\theta_1} = \frac{-m_1 L_1 \dot{\theta_1}^2 ab + g m_2 \sin\theta_2 b - m_2 L_2 \dot{\theta_2}^2 a - m_x\, g \sin\theta_1}{L_1 L_x - m_2 L_1 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \tag{20}$$

$$\ddot{\theta_2} = \frac{m_2 L_2 \dot{\theta_2}^2 ab + g \sin\theta_1 b\, m_x + L_1 \dot{\theta_1}^2 a\, (m_x - g \sin\theta_2) m_x}{L_2 m_x - m_2 L_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \tag{21}$$

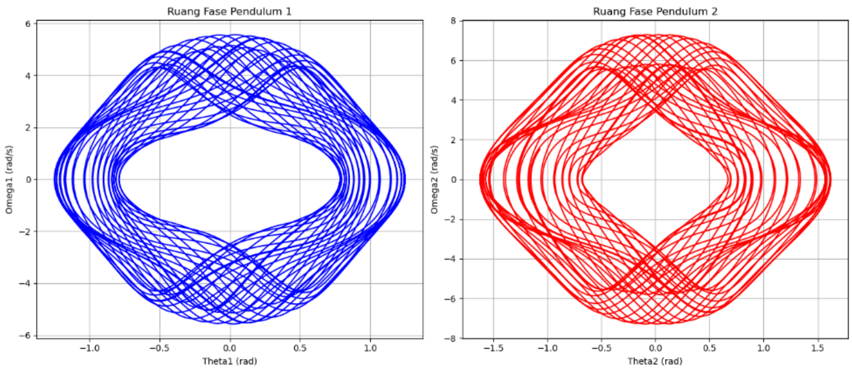
Solusi numerik untuk sistem pendulum ganda pada persamaan (20) dan (21) disajikan menggunakan metode Runge-kutta orde 4 dengan bantuan bahasa pemrograman Python. Dimana nilai-nilai dari parameter yang disajikan anatara lain L_1, L_2, m_1, m_2, g dipilih untuk grafik *output* $m_1 = m_2 = 1\, kg, L_1 = L_2 = 1\, m,$ dan $g = 9{,}81\, m/s^2$. Sedangkan parameter awal diatur untuk θ_1 , θ_2, dengan besaran yang berbeda, sedangkan $\dot{\theta}_1$ dan $\dot{\theta}_2 = 0$. Dengan parameter yang ada, grafik *output*



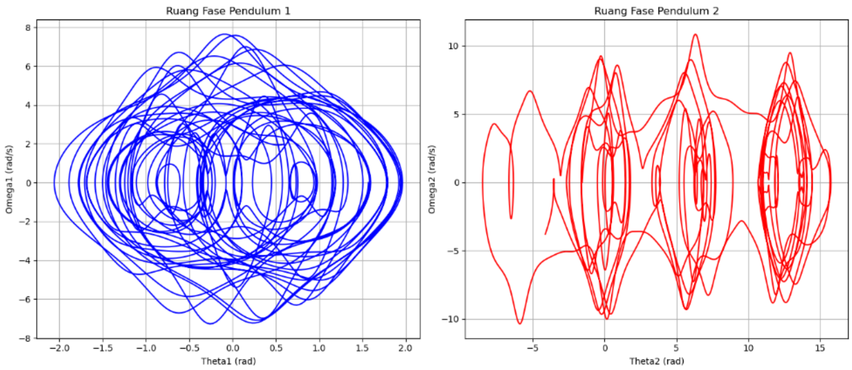
Gambar 2. Ruang Fase $\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = -\frac{\pi}{4}$



Gambar 3. Ruang Fase $\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = -\frac{\pi}{6}$



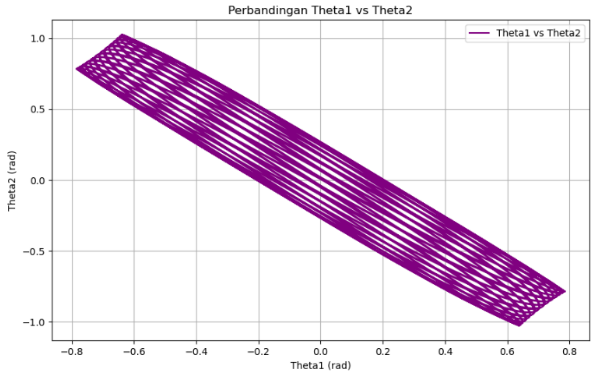
Gambar 4. Ruang Fase $\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$



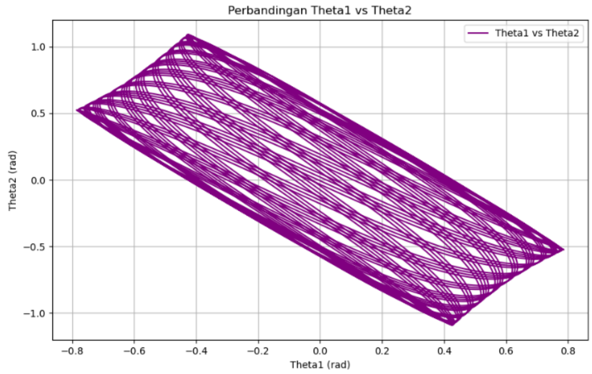
Gambar 5. Ruang Fase $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$

Pada gambar 2-5 diagram ruang fase memperlihatkan pola gerak kompleks yang bergantung pada kondisi awal bandul. Pergerakan mungkin tampak teratur, tetapi dalam kondisi lain polanya menunjukkan karakteristik kacau. Pendekatan numerik terhadap gerak bandul ganda menunjukkan bahwa pola ruang fase sangat peka terhadap kondisi awal sudutnya. Dalam kondisi awal yang hampir simetris seperti $\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = -\frac{\pi}{4}$, sistemnya teratur. menunjukkan pola periodik. Ini mencerminkan keseimbangan energi antara dua pendulum. Namun, kondisi awal kehilangan simetri, seperti $\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = -\frac{\pi}{6}$, dan $\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$. Sedangkan untuk $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$, pola ruang fase menjadi semakin kompleks dan bertransisi ke sifat-sifat yang kacau. Menunjukkan Dalam kondisi ekstrim seperti, pola ruang fase sepenuhnya kacau. dan sensitivitas bandul nonlinier dan ganda terhadap perubahan kecil pada kondisi awal. Hasil-hasil ini menegaskan bahwa bandul ganda adalah contoh nyata suatu sistem dinamis yang menunjukkan perilaku kacau ketika simetri kondisi awal terganggu.

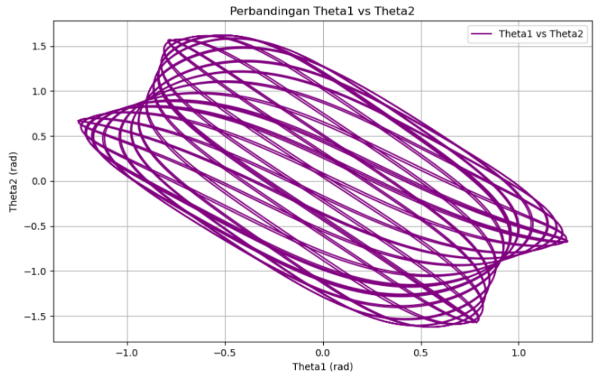
Grafik θ_1 versus θ_2 menunjukkan bagaimana sudut pendulum ganda saling mempengaruhi. Perubahan kecil pada kondisi awal dapat menyebabkan perubahan besar pada dinamika sistem, menunjukkan sensitivitas yang tinggi terhadap kondisi awal (prinsip dasar teori chaos). Perubahan kecil pada kondisi awal θ_2 menghasilkan pola ruang fase yang sangat berbeda, membenarkan sifat kacau dari sistem pendulum ganda. Sensitivitas ini meningkat seiring waktu, terutama pada energi tinggi. Dalam kondisi awal energi rendah menunjukkan pergerakan yang relatif teratur. Namun, ketika kondisi awal memiliki perbedaan sudut yang lebih besar atau energi total meningkat ($\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$) polanya menjadi lebih kacau dan tidak teratur. Meskipun kekacauan terjadi, ada beberapa pola yang menyerupai lintasan terikat. Namun, sebagian besar lintasan menunjukkan perilaku yang tidak menentu. grafik tersebut mengilustrasikan kepekaannya terhadap kondisi awal dan tidak adanya pola periodik yang sebenarnya. Namun, ada juga perbedaan dalam perilaku dinamis. Grafik pertama menunjukkan lebih banyak kekacauan acak"dengan kecepatan sudut tinggi.



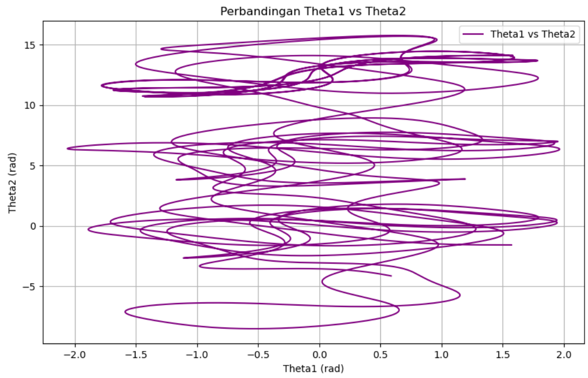
Gambar 2. Ruang Konfigurasi $\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = -\frac{\pi}{4}$



Gambar 3. Ruang Konfigurasi $\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = -\frac{\pi}{6}$



Gambar 4. Ruang Konfigurasi $\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$



Gambar 5. Ruang Konfigurasi $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$

6. Simpulan

Dalam penelitian ini, kami berhasil memodelkan gerak pendulum ganda dengan menggunakan metode Runge-Kutta numerik orde empat. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pendulum ganda menunjukkan perilaku yang sangat sensitif terhadap kondisi awal, sehingga mengakibatkan dinamika sistem yang kompleks dan kacau. Pendekatan numerik telah terbukti efektif dalam menganalisis sistem ini, memungkinkan visualisasi yang jelas mengenai perilaku kacau dan pola dinamis yang muncul. Studi ini menegaskan pentingnya metode numerik dalam studi sistem dinamik nonlinier dan memberikan dasar yang kuat untuk penelitian lebih lanjut di bidang ini.

Meski tampak sederhana, pendulum ganda menunjukkan perilaku yang sangat kompleks dan peka terhadap perubahan kecil pada kondisi awal. Hal ini menjadikannya model ideal untuk mempelajari berbagai fenomena fisik, mulai dari getaran sederhana hingga teori chaos. Dalam penelitian ini, kami menggunakan pendekatan Lagrangian untuk menyederhanakan permasalahan mekanis dengan menggunakan prinsip energi, bukan gaya. Hal ini sangat berguna ketika berhadapan dengan sistem yang kompleks. Metode Runge-Kutta orde keempat dipilih karena menawarkan keseimbangan yang baik antara akurasi dan efisiensi komputasi. Hasilnya menunjukkan bahwa metode numerik dapat mengungkap pola dinamis yang tidak dapat dijelaskan dengan pendekatan analitis tradisional. Selain itu, metode ini memungkinkan kita untuk memvisualisasikan karakteristik perilaku kacau sistem pendulum ganda, yang penting untuk memahami dinamika sistem yang kompleks.

Daftar Pustaka

[1] Strogatz S H 2018 Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering

[2] Ott E 2002 Dynamical properties of chaotic systems *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge: Cambridge University Press) p 115–67

[3] Raniati, Ariyanti Y, Subekti P and Syahropi H 2022 Studi Literatur: Mekanika Lagrange *Aptek* **15** p 55–8

[4] Butcher J C 1996 A history of Runge-Kutta methods *Appl. Numer. Math.* **20** p 247–60

[5] Gautam P 2016 System identification of nonlinear Inverted Pendulum using artificial neural network *2016 International Conference on Recent Advances and Innovations in Engineering (ICRAIE)* p 1–5