Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika Volume 2 Nomor 2
P-ISSN: 2502-7638; E-ISSN: 2502-8391

KESALAHAN PENALARAN DALAM PEMBUKTIAN MASALAH STRUKTUR ALJABAR

Mohamad Waluyo[1)], Christina Kartika Sari[2)]
[1,2]Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Surakarta
Email: [1]Mohammad.Waluyo@ums.ac.id, [2]christina.k.sari@ums.ac.id

Abstrak
Penelitian ini mempunyai fokus pada kesalahan yang dilakukan mahasiswa dalam membuktikan suatu masalah dalam struktur aljabar. Secara umum kesalahan yang dilakukan adalah kesalahan penalaran yang terkait dengan cara berfikir mahasiswa. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui dan memetakan kesalahan-kesalahan umum yang dilakukan mahasiswa dalam menyelesaikan masalah dalam aljabar abstrak. Jenis penelitian ini adalah kualitatif deskriptif dengan subyek penelitian yaitu pekerjaan 101 mahasiswa pada mata kuliah Struktur Aljabar Abstrak. Tugas-tugas dan hasil ujian mahasiswa dianalisa setiap langkah pengerjaannya. Beberapa kesalahan penalaran yang ditemuka dikategorikan menjadi empat: (1) Kesalahan penggunaan contoh dalam pembuktian (2) Penggunaan asumsi yang tidak tepat (3) Pembuktian biimplikasi yang tidak lengkap (4) Penggunaan definisi yang tidak tepat.

Kata kunci: Kesalahan, Pembuktian, Aljabar Abstrak

PENDAHULUAN

Secara umum mata kuliah matematika pada perguruan tinggi khususnya pada program studi matematika ataupun pendidikan matematika dapat dibagi menjadi dua menurut kerangka berfikirnya yaitu: mata kuliah rumpun abstrak dan komputasional. Mata kuliah rumpun abstrak yaitu mata kuliah yang materi di dalamnya mengarah pada abstraksi atas himpunan-himpunan nyata yang biasanya terdapat banyak teorema/aksioma, definisi, lemma dan sebagainya. Mata kuliah rumpun abstrak ini banyak dijumpai pada peminatan analisis ataupun aljabar, sebagai contohnya adalah analisis real, teori bilangan, struktur aljabar/aljabar abstrak, dan geometri. Sedangkan mata kuliah rumpun komputasional lebih mangarah pada kemampuan analitik, manipulasi aljabar, dan komputasi. Mata kuliah seperti kalkulus, statistik, persamaan differensial, dan metode numerik merupakan mata kuliah rumpun komputasional.

Pembelajaran materi matematika yang bersifat komputasional sudah diberikan sejak bangku sekolah dasar seperti yang direkomendasikan NCTM (*National Council of Teacher of Mathematics*) 2000 agar mengajarkan aljabar di seluruh kelas awal Sekolah Dasar. Aljabar yang dimaksudkan adalah aritmetika yang diajarkan sejak dini. Sedangkan materi matematika abstrak baru diberikan di bangku perkuliahan. Hal ini disebabkan matematika abstrak relatif lebih sulit daripada matematika komputasional. Matematika komputasional terkait dengan perhitungan dan manipulasi aljabar sedangkan pada matematika abstrak mengarah pada pembuktian teorema dan lemma. Seperti kesulitan dalam aljabar abstrak yang dikemukakan oleh Keith (2002), Stavros (2014), dan elif dkk (2015). Mereka menyatakan bahwa mahasiswa sering melakukan kesalahan dalam menyelesaikan persoalan matematika abstrak.

Beberapa penelitian yang berkaitan dengan analisis kesalahan dalam pembuktian matematika dalam aljabar astrak diantaranya penelitian oleh Stavros (2014). Secara ringkas kesalahan yang disebutkan Stavros ada empat yaitu: Kesalahan Asumsi, Penggunaan Contoh, Pembuktian searah pada pernyataan dua arah, dan Penyalahgunaan Definisi. Penelitian serupa dilakukan oleh Jackson (2014) yang bertujuan melihat kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan pada Analisis Riil. Hasil yang diperoleh oleh Jackson adalah mahasiswa yang diwawancara mengerti permasalahan yang diberikan. Mahasiswa tersebut dapat menentukan apa yang diketahui dan tidak diketahui pada soal. Salah satu mahasiswa tersebut mengetahui konsep dari persoalan tetapi dia tidak dapat melakukan sintesa konsep yang dia ketahui untuk melangkah. Jackson juga menyebutkan bahwa mahasiswa masih kurang mampu menyusun skema dalam menyelesaikan masalah.

Penelitian lain juga dilakukan oleh Arikan dkk (2015) yang menganalisis kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan masalah teori grup. Pada penelitiannya itu, jawaban mahasiswa dikategorikan menjadi benar atau salah. Jawaban mahasiswa yang salah selanjutnya dilakukan analisis kontennya. Hasil dari analisis itu kemudian diklasifikasikan dalam rangka pembuatan saran-saran pada mahasiswa dalam menyelesaikan masalah teori grup. Penelitian-penelitian yang disebutkan di atas terkait dengan masalah matematika abstrak yaitu aljabar abstrak dan Analisis Riil. Penelitian lain yang terkait dengan studi kesalahan mahasiswa diantaranya penelitian pada program studi pendidikan matematika IAIN Ar-Raniry Banda Aceh yang menyebutkan adanya kesalahan-kesalahan yang dilakukan mahasiswa dalam memecahkan masalah trigonometri yang didominasi oleh kesalahan prinsip dengan penyebab kurangnya pemahaman konsep oleh mahasiswa (Abidin, 2012).

METODE PENELITIAN

Jenis Penelitian ini termasuk penelitian deskriptif yang ditujukan untuk mendeskripsikan suatu keadaan atau fenomena-fenomena apa adanya (Sutama, 2012). yang menggunakan analisis deskriptif yaitu menggambarkan kondisi-kondisi pada subjek penelitian secara detail yang selanjutnya dibuat klasifikasi terhadap infomasi yang diperoleh. Penelitian jenis ini tidak melakukan uji hipotesis dan tidak melakukan generalisasi pada kelompok diluar subyek penelitian. Data tersebut selanjutnya diolah menggunakan analisis deskriptif yaitu menjabarkan kesalahan-kesalahan yang dilakukan mahasiswa dalam pekerjaannya itu.

Penelitian ini dilakukan pada 101 mahasiswa mata kuliah Struktur Aljabar Ring Tahun Ajaran 2015/2016 di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Surakarta. Cara untuk melihat kesalahan mahasiswa pada penyelesaian masalah aljabar abstrak adalah dengan menganalisa hasil pekerjaannya. Data yang digunakan adalah hasil pekerjaan mahasiswa saat tugas maupun ujian semester.

Instrumen yang digunakan adalah instrumen tes untuk mendiagnosa kelemahan mahasiswa. Instrumen yang digunakan merupakan soal uraian bebas. Arifin (2012) mengatakan bahwa istilah uraian bebas pada Depdikbud biasa disebut Bentuk Uraian Non Objektif (BUNO). Materi yang digunakan dalam penelitian ini adalah Struktur aljabar ring. Informasi yang diperoleh selama observasi di kelas adalah mahasiswa mengalami kesulitan dalam menyelesaikan suatu pertanyaan dan atau membuktikan suatu pernyataan / teorema. Setelah diperoleh deskripsi kesalahan-kesalahan mahasiswa selanjutnya dilakukan kategorisasi kesalahan yang ada.

Proses analisis data pada penelitian ini menggunakan model Miles and Huberman dalam Sugiyono (2013) melalui tiga tahap: Reduksi Data, Penyajian dan penarikan kesimpulan. Reduksi data disini adalah merangkum, memilih hal pokok, memfokuskan pada kesalahan yang dikerjakan mahasiswa, dicari tema dan polanya, dan membuang hal yang tidak perlu. Melalui reduksi data akan ada gambaran yang lebih jelas mengenai kesalahan apa saja saat mahasiswa dalam menyelesaikan masalah. pekerjaan yang salah selanjutnya dikategorikan seperti kategori yang dikemukakan Stavros (2014) yaitu kesalahan asumsi, penggunaan contoh, Pembuktian searah pada pernyataan dua arah, dan penyalahgunaan definisi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Matematika merupakan suatu ilmu yang berkaitan dengan bentuk–bentuk atau sruktur–struktur abstrak dan hubungan-hubungan diantara hal-hal itu (Hudojo, 2005). Dalam menyelesaikan masalah matematika siswa harus memahami konsep-konsep abstrak yang selanjutnya dicari hubungannya dalam tujuan menemukan solusi. Proses siswa menemukan solusi terkadang mengalami kesulitan dan tidak jarang melakukan kesalahan.

Kesalahan yang dilakukan siswa beraneka macam tipe sesuai dengan jenis soal yang diberikan. Secara umum dapat dikelompokkan menjadi dua: kesalahan pada jenis soal komputasional dan kesalahan pembuktian. Kesalahan pada jenis yang pertama seperti dicontohkan oleh Hw (2004) yang melakukan pemetaan kesalahan mahasiswa pada mata kuliah Kalkulus I yang diperoleh 4 poin kesalahan:

a. Kesalahan dalam memindah ruas
b. Kesalahan memanipulasi bentuk-bentuk pecahan
c. Kesalahan memanipulasi bentuk pangkat
d. Kesalahan memanipulasi bentuk Geometri.

Jenis kedua adalah kesalahan pada jenis kesalahan pada pembuktian. Penelitian kesalahan dalam pembuktian ini dilakukan oleh beberapa peneliti diantaranya Weber (2002). Weber mengelompokkan kesalahan pembuktian dalam mata kuliah Aljabar Abstrak menjadi empat, yaitu: 1) *failure to invoke syntactic knowledge*, 2) *insufficient syntactic knowledge base*, dan 3) *logical error*. Pembuktian dianggap *failure to invoke syntactic knowledge* apabila mahasiswa mengetahui fakta-fakta yang digunakan untuk pembuktian tapi tidak berhasil menggunakan fakta-fakta tersebut untuk mengkostruksi bukti yang diminta. Selanjutnya, pembuktian mahasiswa dianggap *insufficient syntactic knowledge base* apabila mahasiswa tidak mengetahu fakta-fakta yang digunakan untuk mengkonstruksi bukti. Jika mahasiswa dapat mengkonstruksi bukti namun bukti tersebut tidak valid, maka dikategorikan dalam *logical error*.

Penelitian ini mempunyai fokus pada kesalahan yang dilakukan mahasiswa dalam membuktikan suatu masalah dalam struktur aljabar. Secara umum kesalahan yang dilakukan adalah kesalahan penalaran yang terkait dengan cara berfikir mahasiswa. Kesalahan-kesalahan tersebut dikategorikan menjadi empat: penggunaan contoh spesifik dalam membuktikan suatu pernyataan yang umum, penggunaan asumsi padahal asumsi itu adalah pernyataan yang harus dibuktikan, pembuktian searah untuk pernyataan biimplikasi, penggunaan definisi yang tidak tepat.

1. Penggunaan contoh dalam pembuktian

Penggunaan contoh merupakan hal penting dalam pembelajaran matematika, selain memberikan ilustrasi terkait dengan materi yang diajarkan, contoh memberikan pemahaman kepada siswa bagaimana suatu permasalahan diselesaikan. Sari (2017) menyampaikan penggunaan contoh spesifik harus ditekankan sebagai pengantar bukti atau alat bantu memahami teorema, bukan untuk membuktikan teorema. Namun pemakaian contoh pada penyelesaian masalah pembuktian bisa menjadi langkah yang kurang tepat. Berikut adalah kasus penggunaan contoh yang dilakukan mahasiswa dalam membuktikan suatu pernyataan matematika.

Soal 1. Jika $a|b$ (a membagi b) dan $b|c$ (b membagi c) maka tunjukkan bahwa $a|c$ (a membagi c).

Solusi 1:
Misalkan $a = 2$, $b = 6$, dan $c = 12$.
Didapat $2|6, 6|12$ dan $2|12$
Terbukti.

Soal 2. Diketahui $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ **dengan** operasi $+$ dan $\times$ pada $\mathbb{Z}_3$. Buktikan pada operasi $+$, berlaku sifat assosiatif.

Solusi 2:

Assosiatif penjumlahan $(a+b)+c=a+(b+c)$

Misalkan $a=\bar{0}$, $b=\bar{1}$, dan $c=\bar{2}$.

Diperoleh

$$(\bar{0}+\bar{1})+\bar{2}=\bar{0}+(\bar{1}+\bar{2})$$
$$\bar{1}+\bar{2}=\bar{0}+\bar{0}$$
$$\bar{0}=\bar{0}$$

Terbukti.

Ilustrasi di atas merupakan sebagian contoh pengerjaan mahasiswa. Dalam pengerjaan soal 1 dan soal 2 dapat dilihat bagaimana menggunakan contoh dalam pembuktian suatu pernyataan umum dan merupakan suatu langkah yang tidak tepat. Angka-angka yang diambil hanyalah satu kejadian dari banyak sekali kemungkinan yang dapat terjadi. Hal tersebut tidak dapat digeneralisasi menjadi sebuah pembuktian yang sah. Suatu contoh dapat digunakan dalam pembuktian apabila: 1) contoh tersebut digunakan sebagai pendukung dalam arti hanya sebatas pelengkap pembuktian 2) digunakan sebagai contoh penyangkal jika akan membuktikan suatu teorema tidak berlaku seperti dibawah ini

Soal 3. Buktikan setiap daerah integral adalah lapangan (field).

Solusi:

Misalkan diambil $\mathbb{Z}$. $(\mathbb{Z},+,\times)$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan dan tidak memiliki pembagi nol sehingga $(\mathbb{Z},+,\times)$ merupakan daerah integral. Namun elemen tak nol $\mathbb{Z}$ tidak mempunyai invers perkalian yang menyebabkan $\mathbb{Z}$ bukan lapangan.

Jadi tidak setiap daerah integral merupakan lapangan

2. Penggunaan asumsi yang tidak tepat

Asumsi yang dimaksud disini berkaitan dengan pembuktian pernyataan dengan struktur kalimat implikasi $p\rightarrow q$. Kesalahan yang dilakukan disini adalah melakukan pembuktian dengan mengasumsikan q benar untuk membuktikan q itu sendiri, sehingga sebenarnya mahasiswa tersebut tidak membuktikan apa-apa. Berikut contoh pekerjaan mahasiswa terkait dengan penggunaan asumsi yang salah.

Soal 4. Jika $g: A\rightarrow B$ dan $f: B\rightarrow C$ adalah pemetaan yang surjektif maka tunjukkan bahwa $f(g)$ juga pemetaan yang surjektif

Solusi:

Misalkan $f(g)$ pemetaan yang surjektif.

Maka terdapat $a\in A$ sehingga $f\big(g(a)\big)=c$ dengan $c\in C$.

Diperoleh $f(g)$ surjektif.

Mahasiswa menggunakan asumsi bahwa pemetaan $f(g)$ surjektif untuk membuktikan $f(g)$ surjektif. Hal tersebut merupakan kesalahan pemilihan asumsi.

3. Pembuktian biimplikasi yang tidak lengkap

Pernyataan biimplikasi $p\leftrightarrow q$ banyak sekali ditemukan dalam definisi, teorema, maupun lemma. Pembuktian pernyataan biimplikasi ini harus mencakup dua hal, $p\rightarrow q$ dan $q\rightarrow p$. Jika pembuktian hanya mencakup satu aspek saja maka pembuktian tersebut mengalami kesalahan logika (*logical error*) dan tentu saja tidak valid (Weber, 2002). Berikut ini contoh penyelesaian soal yang tidak valid

Soal 5. Hukum kanselasi berlaku di ring R jika dan hanya jika R tidak memiliki pembagi nol.

Solusi:

Jika diketahui di R berlaku hukum kanselasi dan $ab=0$ untuk $a,b\in R$.

Andaikan $a\neq 0$ maka

$ab = 0 = a.0$

Karena berlaku hukum kanselasi maka $b = 0$. Sebaliknya jika $b \neq 0$ maka $ab = 0 = 0.b$ dari sifat kanselasi diperoleh $a = 0$. Jadi R tidak memiliki pembagi nol.
Terbukti.

4. Penggunaan definisi yang tidak tepat

Edwards dan Ward (2004) telah mengamati kesalahan penggunaan definisi matematika, dimana mahasiswa tidak dapat memahami peranan definisi dalam pembuktian matematika. Pertama, mahasiswa tidak memahami bahwa definisi itu ditetapkan dan menyesuaikan konteks. Kedua, mahasiswa yang dapat menuliskan definisi dengan tepat, tidak mampu mengaplikasikan dengan baik. Sebagai contoh

Soal 6. Buktikan jumlahan dua bilangan prima yang lebih dari 2 adalah genap
Solusi:
Bilangan-bilangan prima adalah $1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$ tetapi tanpa memasukkan 1 dan 2. Sehingga jika diambil dua pasangan misalkan $3 + 5 = 8$ atau $3 + 11 = 14$ maupun $11 + 17 = 28$. Akan selalu didapatkan bilangan genap berapapun pasangan yang diambil.

Dalam soal ini mahasiswa tidak mengerti definisi dari bilangan prima dengan baik. Sehingga tidak dapat menggunakan definisi bilangan prima untuk membuktikan soal 6. Soal lainnya berkaitan dengan pembuktian bilangan rasional sebagai suatu ring.

Soal 7. Buktikan bahwa himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ adalah ring dengan elemen satuan.
Solusi:

a. Tertutup
Misalkan $a = 2, b = 5$
$2 + 5 = 6,\ 6 \in \mathbb{Q}$ sehingga tertutup dipenuhi.

b. Mempunyai elemen identitas
Terdapat $0 \in \mathbb{Q}$ sehingga untuk $2 \in \mathbb{Q}$
$0 + 2 = 2 + 0 = 2 \in \mathbb{Q}$, sehingga elemen identitasnya 0.

c. Invers
Misalkan $a \in \mathbb{Q}$ maka terdapat $-a \in \mathbb{Q}$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$, jadi mempunyai invers penjumlahan

Pembuktian pada soal 7 merupakan sebagian dari jawaban mahasiswa. Pada pembuktian mengenai bilangan rasional tersebut, mahasiswa tidak menggunakan definisi dari bilangan rasional yaitu $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}\ dan\ b \neq 0\right\}$ yang dapat digunakan untuk pembuktian generalnya.

KESIMPULAN

Kesalahan umum dalam masalah pembuktian berakar pada penalaran atau kesalahan logika dari mahasiswa dan ditambah pemahaman konsep yang kurang baik definisi, teorema, dan lemma pada aljabar abstrak. Kesalahan-kesalahan tersebut: penggunaan contoh yang salah, asumsi yang keliru, pembuktian yang tidak lengkap, dan penggunaan definisi yang tidak tepat seharusnya dapat diminimalisir dengan mengetahui akar permasalahan. Selanjutnya dengan memberikan pemahaman tentang kesalahan yang umumnya dilakukan ini kepada mahasiswa diharapkan dapat menurunkan tingkat kesalahan yang serupa.

ACKNOWLEDGMENT

Penelitian ini disponsori oleh Universitas Muhammadiyah Surakarta melalui skim Pengembangan Individual Dosen 2016.

DAFTAR PUSTAKA

Abidin, Z. (2012). Analisis Kesalahan Mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika Fakultas Tarbiyah Iain Ar-Raniry Dalam Mata Kuliah Trigonometri Dan Kalkulus 1. DIDAKTIKA, XIII(1), 183–196.

Arifin, Z. (2012). Evaluasi Pembelajaran (1st ed.). Bandung: Remaja Rosdakarya.

Arikan, E. E., Ozkan, A., & Ozkan, E. M. (2015). An examination in Turkey : Error analysis of Mathematics students on group theory. Educational Research and Reviews, 10(16), 2352–2361. http://doi.org/10.5897/ERR2015.2329

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis) use of mathematical definitions. The American Mathematical Monthly. 111(5), 411-424.

Hudojo, H. (2005). Pengembangan Kurikulum dan Pembelajaran Matematika. Malang: UM Press.

Hw, S. (2004). Problematika Pengajaran Kalkulus-I Mahasiswa Semester Awal. Jurnal Kajian Penelitian Pendidikan Universitas Muhammadiyah Surakarta, 16(1).

Mairing, J. P. (2014). Student’s Difficulties in Solving Problem of Real Analysis. In Proceeding of International Conference On Research, Implementation And Education Of Mathematics And Sciences (pp. 289–298). Yogyakarta.

Malik, D. S., & Mordeson, J. N. (2007). Introduction to Abstract Algebra.

Sari, C.K. Waluyo, M., Ainur, C.M. (2017). Menggunakan Contoh Dalam Pembuktian. Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, 2(1), 1-9.

Stavrou, S. G. (2014). Common Errors and Misconceptions in Mathematical Proving by Education Undergraduates. IUMPST, 1(March), 1–8.

Sugiyono. (2013). Metode Penelitian Pendidikan (1st ed.). Bandung: Alfabeta.

Sutama. (2012). Metode Penelitian Pendidikan (1st ed.). Surakarta: Fairuz Media.

Weber, K. (2002). Student Difficulty In Constructing Proofs: The Need For Strategic Knowledge. Educational Studies in Mathematics, 48, 101–119.