PENGENDALIAN OPTIMAL MODEL PENYAKIT

Awawin Mustana Rohmah[1], Rifky Ardhana Kisno Saputra[2]

[1] Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Darul Ulum Lamongan
[2] Fakultas Ekonomi, Universitas Islam Darul Ulum Lamongan

Email: awawin.emer@gmail.com

Abstrak
Pada artikel ini dibahas model matematika tipe *SEIR* untuk menggambarkan penyebaran penyakit infeksi dengan adanya penyembuhan dan tanpa adanya kekebalan terhadap infeksi tersebut. Pada model penyebaran penyakit, populasi dibedakan menjadi empat subpopulasi yaitu subpopulasi *susceptible* (subpopulasi individu yang rentan terhadap penyakit), subpopulasi *exposed* (subpopulasi individu yang terinfeksi namun belum menunjukkan tanda-tanda mengidap penyakit), subpopulasi *infected* (subpopulasi individu yang terinfeksi serta dapat menularkan penyakit) dan subpopulasi *recovered* (subpopulasi individu yang sembuh dari penyakit). Dalam model epidemik masa inkubasi disebut periode laten (*exposed*). Adanya periode laten erat kaitannya dengan model epidemik SEIR. Penyebaran penyakit sangat luas, sehingga dilakukan kontrol untuk meminimumkan subpopulasi *infected* dengan cara memberikan obat pada subpopulasi tersebut, serta meminimumkan biaya dari obat tersebut terhadap subpopulasi *infected*. Sedemikian hingga subpopulasi terinfeksi berkurang dan subpopulasi *recovered* akan bertambah dengan biaya pengobatan yang minimum. Untuk membentuk model kontrol adalah memebentuk Persamaan Pontriagin, kemudian menurunkan Pontriagin Hamiltonian terhadap kontrol, selanjutnya hasil turunan kontrol tersebut disubstitusikan kedalam Hamiltonian, sehingga diperoleh Hamiltonian Optimal. Dalam menentukan State dengan cara menurunkan Hamiltonian Optimal terhadap SEIR dan untuk menentukan Co-State dengan cara menurunkan Hamiltonian Optimal terhadap masing - masing nilai batas akhir yang bebas. Simulasi yang digunakan dengan *Software* Matlab berbantuan toolbox BVP4C. Berdasarkan hasil simulasi tersebut, diperoleh bahawa subpopulasi terinfeksi mengalami penurunan mendekati nol, namun untuk subpopulasi yang sembuh mengalami kenaikan yang tinggi. Sedemikian hingga kontrol yang diberikan untuk pengendalian model penyebaran penyakit sangat efektif.

Kata Kunci: Model SEIR, Pengendalian Optimal, Pontriagin.

Abstract
In this article we discuss a mathematical model of the type SEIR to describe the spread of infectious diseases in the presence of healing and without any resistance to the infection. In the disease spread model, the population is divided into four subpopulations, namely susceptible subpopulations (subpopulations of individuals susceptible to disease), exposed subpopulations (subpopulations of infected individuals who have not yet shown signs of disease), infected subpopulation (subpopulation of infected individuals and transmitting diseases) and recovered subpopulation (subpopulation of individuals recovering from disease). In the epidemic model the incubation period is called the exposed period. The latent period is closely related to the SEIR epidemic model. The spread of the disease is very extensive, so control is carried out to minimize infected subpopulations by giving drugs to the subpopulation, and minimizing the cost of the drug to the infected subpopulation. So that the infected subpopulation decreases and subpopulation recovered will increase with minimum medical costs. To form a control model is to form the Pontryagin Equation, then decrease the Hamiltonian Pontryagin to the control, then the control derivative is substituted into the Hamiltonian, so that the Optimal Hamiltonian is obtained. In determining the State by decreasing the Optimal Hamiltonian to SEIR and to determine Co-State by decreasing the Optimal Hamiltonian for each free final value. Simulation used with Matlab Software. Based on the simulation results, it was found that the infected subpopulation had decreased to near zero, but for the recovered subpopulations it had a high increase. So that the control given for controlling the spread of the disease model is very effective.

Keywords: *SEIR Models, Optimal Control, Pontryagin.*

1. PENDAHULUAN

Penyakit adalah suatu gangguan kesehatan yang dapat terjadi karena beberapa penyebab seperti keturunan, kurang gizi, kecelakaan, bakteri, dan virus. Penyakit secara umum dapat dibagi menjadi dua jenis, yaitu penyakit menular dan penyakit tidak menular. Penyakit menular dapat menyebar melalui kontak langsung maupun tidak langsung, sehingga dapat mengakibatkan infeksi yang berperan pada penyebaran penyakit. Penyebaran penyakit menular yang tidak terkontrol mengakibatkan kondisi yang disebut epidemi.

Epidemi adalah kejadian tersebarnya penyakit menular dalam masyarakat yang jumlah penderitanya meningkat secara nyata melebihi keadaan yang lazim pada waktu dan daerah tertentu. Jika penyebaran penyakit tersebut tidak lenyap dan jumlah orang yang terinfeksi sudah tidak meningkat, maka suatu penyakit dikatakan berada dalam keadaan endemi. Model matematika merupakan salah satu alat yang dapat digunakan untuk mempelajari dinamika penyebaran penyakit menular. Beberapa contoh model matematika yang digunakan untuk mengetahui pola penyebaran penyakit antara lain model SI, model SIS, model SIR, model SEIR, dan sebagainya. Model-model tersebut memiliki karakteristik yang khas berdasarkan jenis dan bentuk penyebaran penyakit menular yang diamati.

Model SEIR merupakan salah satu model epidemi yang menggambarkan penyebaran penyakit infeksi dengan adanya periode laten. Pada model SEIR populasi dibedakan menjadi empat subpopulasi yaitu subpopulasi susceptible atau subpopulasi yang rentan terhadap penyakit, subpopulasi exposed atau subpopulasi dalam periode laten, subpopulasi infected atau subpopulasi yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit, dan subpopulasi recovered atau subpopulasi yang sembuh. Subpopulasi rentan berpindah ke subpopulasi exposed ketika terjadi kontak antara subpopulasi rentan dengan periode laten, subpopulasi rentan dengan subpopulasi terinfeksi, dan subpopulasi rentan dengan subpopulasi sembuh. Dalam hal ini, penyakit yang dapat dikategorikan dalam model SEIR adalah penyakit yang memiliki perode laten (penyakit yang menunjukkan tanda – tanda gejala dalam waktu tertentu).

Dewasa ini, penyakit menular sangat beraneka ragam, misalnya penyakit yang sering terjadi dan dapat dibentuk dalam model matematika SEIR yaitu demam berdarah. Penyakit Demam Beradarah atau sering disebut DBD merupakan penyakit yang sering terjadi di belahan dunia khusunya Indonesia. Dalam penyebaran penyakit DBD sangat mudah menularkan ke individu lain, sehingga perlu adanya penanganan khsuus dalam meminimumkan penyebarannya. Salah satunya dengan memberikan obat (vaksin) untuk meminimukan penyebarannya, namun juga perlu memperhatikan biaya yang dikeluarkan. Sedemikan hingga, untuk meminumkan biaya pengobatan tersebut juga perlu dikontrol.

Guihua Li*, Zhen Jin (2004) membahas kestabilan global dari model epidemic SEIR dengan adanya periode laten. Rohmah, dkk (2017) membahas simulasi model penyebaran virus ebola antar dua Negara dengan model Matematika SEIR. Fatmawati dan Tasman (2015) membahas strategi kontrol yang optimal untuk mengurangi penyebaran resistensi malaria.

Pada penelitian ini dibahas mengenai pengendalian optimal penyebaran penyakit. Pengendalian optimal dilakukan untuk meminimumkan adanya penyebaran penyakit menular dalam model SEIR. Dalam hal ini, untuk meminumkan adanya penyebaran penyakit menular, diberikan kontrol pada subpopulasi terinfeksi dengan pemberian obat. Meminumkan biaya dalam pengobatan juga dipertimbangkan dalam model penyebaran penyakit ini. Untuk pengendalian optimal dalam model SEIR dengan Pontriagin. Selanjutnya, model yang diperoleh dilakukan simulasi Matlab berbantuan toolbox BVP4C. Hasil simulasi bertujuan untuk menunjukkan grafik pola penyebaran penyakit yang telah dikontrol dan grafik kontrol.

2. METODE

Metodologi yang digunakan untuk mencapai tujuan dari penelitian ini adalah menentukan fungsi objektif dengan meminimumkan biaya, dimana dalam permasalahan ini penyebaran penyakit menular sangat luas sehingga perlu adanya pemberian vaksin untuk menurunkan penyebaran penyakit. Adapun langkah – langkah yang harus dilakukan untuk pengendalian optimal adalah sebagai berikut.

Cara I: Pembentukan fungsi Pontriagin H

$$\begin{aligned} H(x(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) &= V(x(t), \boldsymbol{u}(t), t) \\ &+ \lambda'(t) f(x(t), \boldsymbol{u}(t), t) \end{aligned}$$

Cara II: Meminimumkan H dengan $\boldsymbol{u}(t)$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^* = 0 \text{ dan } \boldsymbol{u}^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

Cara III: Menggunakan hasil dari cara II kedalam cara I, kemudian menentukan optimal H^*

$$\begin{aligned} H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) \\ = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t) \end{aligned}$$

Cara IV: Menyelesaikan himpunan $2n$ Persamaan diferensial

$$\dot{x}^*(t) = +\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^* \text{ dan } \dot{\lambda}^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^*$$

Dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir

$$\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{tf} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^* - \lambda^*(t)\right]'_{t_f} \delta x_f = 0$$

Cara V: Substitusikan solusi dari $x^*(t), \lambda^*(t)$ dari cara IV kedalam bentuk pengendalian optimal

$u^*(t)$ dari cara II

(Naidu, 2002).

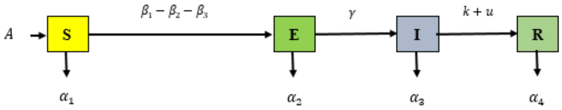
Langkah selanjutnya, dilakukan simulasi dengan *Software Matlab* berbantuan Toolbox BVP4C untuk menunjukkan grafik penyeberan penyakit yang dikontrol.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan paper yang ditulis Guihua Li*, Zhen Jin (2004) dibentuk suatu model Matematika SEIR untuk menunjukkan pola penyebaran penyakit. Pada penelitian ini dibentuk model penyakit SEIR yang dikontrol. Untuk diagram kompartmen dalam

p-ISSN 2460-9986
e-ISSN 2476-9436

model penyebaran penyakit yang dikontrol adalah sebagai berikut.



Gambar 1 . Diagram Kompartmen Model penyebaran Penyakit (SEIR) dengan kontrol

Dari Gambar 1 dapat dibentuk model matematika SEIR dengan kontrol sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = A - \beta_1 SE - \beta_2 SI - \beta_3 SR - \alpha_1 S \tag{1}$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_1 SE + \beta_2 SI + \beta_3 SR - (\gamma + \alpha_2)E \tag{2}$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E - (k + \alpha_3 + u)I \tag{3}$$

$$\frac{dR}{dt} = kI - \alpha_4 R + uI \tag{4}$$

Keterangan:

S	=	Subpopulasi rentan penyakit
E	=	Subpopulasi inkubasi (pada periode laten)
I	=	Subpopulasi terinfeksi
R	=	Subpopulasi penyembuhan
A	=	Angka Kelahiran
β_1	=	Rate Kontak antara subpopulasi *susceptible* dengan *exposed*
β_2	=	Rate Kontak antara subpopulasi *susceptible* dengan *infected*
β_3	=	Rate Kontak antara subpopulasi *susceptible* dengan *recovered*
α_1	=	Rate kematian pada *susceptible*
α_2	=	Rate kematian pada *exposed*
α_3	=	Rate kematian pada *infected*
α_4	=	Rate kematian pada *recovered*
γ	=	Rate subpopulasi *exposed* yang masuk kedalam subpopulasi *infected*
k	=	Rate subpopulasi *infected* yang masuk kedalam subpopulasi *recovered*
u	=	Kontrol

Langkah selanjutnya yaitu menentukan fungsi Objektif dengan memberikan obat pada subpopulasi terinfeksi dan meminimumkan biaya pengobatan. Adapun fungsi Objektif dalam model penyebaran penyakit adalah sebagai berikut.

$$J(U) = \int_{t_0}^{t_f} \left(I + \frac{P.u^2}{2} \right) dt \tag{5}$$

Selanjutnya untuk mengoptimumkan fungsi objektif tersebut terhadap kendala yang diberikan, dapat diselesaikan dengan Prinsip Pontriagyn. Untuk menyelsaikan masalah tersebut, ada beberapa cara yang harus dilakukan, yaitu:

Cara I: Membentuk Fungsi Pontiagrin H

$$\begin{aligned} H &= V + \lambda f \\ &= H\left(\frac{dS}{dt}, \frac{dE}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dR}{dt}, u(t), \lambda_1(t), \lambda_2(\right. \\ &= V(u(t)) + \lambda'(t) f\big(dS(t), dE(t), dI(t), dR(t \\ &= I + \frac{P.u^2}{2} + \lambda_1(A - \beta_1 SE - \beta_2 SI - \beta_3 SR - \alpha_1 S) + \lambda_2(\beta_1 SE + \beta_2 SI + \beta_3 SR - (\gamma + \alpha_2)E) + \lambda_3(\gamma E - (k + \alpha_3 + u)I) + \lambda_4(kI - \alpha_4 R + uI) \end{aligned} \tag{6}$$

Cara II: Menentukan bentuk $u^*(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \\ &= P * u - \lambda_3 I + \lambda_4 I \\ u^* &= \frac{\lambda_3 I - \lambda_4 I}{P} \end{aligned} \tag{7}$$

Cara III: Menggunakan hasil dari cara II kedalam cara I, tentukan optimal H^*

$$\begin{aligned} &H^*\left(\frac{dS^*}{dt}, \frac{dE^*}{dt}, \frac{dI^*}{dt}, \frac{dR^*}{dt}, \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t), \lambda_3^*(t), \lambda_4^*(t)\right) \\ &= I + \frac{1}{2} P \left(\frac{\lambda_3 I - \lambda_4 I}{P}\right)^2 \\ &+ \lambda_1(A - \beta_1 SE - \beta_2 SI - \beta_3 SR - \alpha_1 S) \\ &+ \lambda_2(\beta_1 SE + \beta_2 SI + \beta_3 SR - (\gamma + \alpha_2)E) \\ &+ \lambda_3\left(\gamma E - \left(k + \alpha_3 + \left(\frac{\lambda_3 I - \lambda_4 I}{P}\right)\right) I\right) \\ &+ \lambda_4\left(kI - \alpha_4 R + \left(\frac{\lambda_3 I - \lambda_4 I}{P}\right) I\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Cara IV: Memperoleh bentuk Persamaan State dan Co-State, adapun bentuk state adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial H^*}{\partial \lambda_1} = +(A - \beta_1 SE - \beta_2 SI - \beta_3 SR - \alpha_1 S) \tag{9}$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial \lambda_2} = +(\beta_1 SE + \beta_2 SI + \beta_3 SR - (\gamma + \alpha_2)E) \tag{10}$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial \lambda_3} = +\left(\left(\frac{\lambda_3 I^2}{P}\right) + (\gamma E - (k + \alpha_3 + I)I)\right) \tag{11}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = +\left(\frac{\lambda_4 I^2}{P} + kI - \alpha_4 R + \frac{I^2}{P}\right) \tag{12}$$

Untuk bentuk Co-State adalah sebagai berikut.

p-ISSN 2460-9986
e-ISSN 2476-9436

$$\frac{\partial H^*}{\partial S} = -\big((\lambda_1 A - \lambda_1\beta_1 E - \lambda_1\beta_2 I - \lambda_1\beta_3 R - \alpha_1) + (\lambda_2\beta_1 E + \lambda_2\beta_2 I + \lambda_2\beta_3 R)\big) \quad (13)$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial E} = -(\lambda_1\beta_1 S + (\lambda_2\beta_1 S - (\lambda_2\gamma + \lambda_2\alpha_2) + \lambda_3\gamma) \quad (14)$$

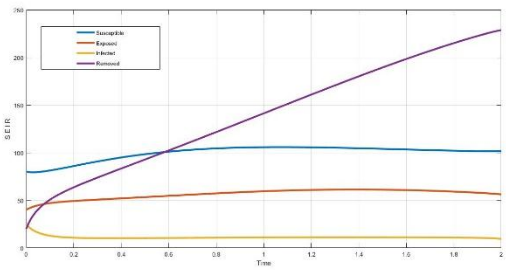
$$\frac{\partial H^*}{\partial I} = -(I + I\left(\frac{\lambda_3^2 - \lambda_4^2}{P}\right) - \lambda_1\beta_2 S + \lambda_2\beta_2 S - \lambda_3 k - \lambda_3\alpha_3 - 2\left(\frac{\lambda_3^2 I - \lambda_3\lambda_4 I}{P}\right) + \lambda_4 k + 2\left(\frac{\lambda_3 I - \lambda_4^2 I}{P}\right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial H}{\partial R} = -(-\lambda_1\beta_3 S + \lambda_2\beta_3 S + \lambda_4\alpha_4) \quad (16)$$

Berdasarkan Persamaan 1 hingga Persamaan 4, kemudian dilakukan penyelesaian masalah dengan Prosedur Pontriagin, diperoleh bentuk State dan Co-State seperti Persamaan (9-16). Selanjutnya dilakukan simulasi dengan Software Matlab berbantuan Toolbox BVP4C. Parameter yang digunakan untuk simulasi ini adalah sebagai berik

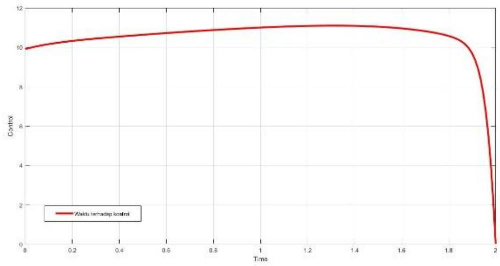
S	=	80
E	=	40
I	=	25
R	=	20
A	=	165
β_1	=	0.001
β_2	=	0.1
β_3	=	0.002
γ	=	1.2
k	=	0.4
α_1	=	0.1
α_2	=	0.2
α_3	=	0.1
α_4	=	0.2
p	=	1

Berdasarkan parameter – parameter tersebut, selanjutnya digunakan simulasi dengan bantuan BVP4C, diperoleh grafik sebagai berikut.



Gambar 2. Grafik Pengendalian Optimal Model Penyebaran Penyakit

Berdasarkan Gambar 2, terlihat bahwa subpopulasi removed mengalami kenaikan yang paling tinggi dibandingkan yang lain. Subpopulasi Infected mengalami penurunan mendekati nol, sedangkan subpopulasi susceptible lebih tinggi dibandingkan subpopulasi exposed. Dalam hal ini, pemberian obat bagi penderita demam berdarah sangat efektif jika dilihat dari Grafik tersebut. Dilihat dari subpopulasi infected yang ditunjukkan pada Gambar 1, mengalami penurunan hingga mendekati nol. Pdaa penelitian ini bertujuan untuk meminimumkan adanya penyebaran penyakit demam berdarah dengan meminimumkan biaya pengobatan. Jadi yang dilakukan pengendalian optimal adalah penyebaran penyakit yaitu subpopulasi infected. Untuk menunjukkan Grafik Kontrol dalam Model penyebaran penyakit adalah sebagai berikut.



Gambar 3. Kontrol

Berdasarkan Gambar 3, terlihat bahwa Grafik menunjukkan penurunan. Dalam hal ini, Grafik yang terbentuk merupakan hasil dari fungsi objektik yaitu dalam Persamaan 5. Pada penelitian ini, fungsi objektif yang diinginkan adalah meminimukan penyebaran penyakit yaitu dilakukan kontrol pada subpopulasi terinfeksi, namun memperhatikan juga adanya biaya. Sedemikian hingga, pada pengendalian optimal (kontrol) juga meminimumkan biaya yang dibutuhkan untuk pemberian obat.

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan di atas, untuk melakukan kontrol pada penyebaran penyakit dengan model SEIR dapat dilakukan dengan prosedur Pontriagin. Selanjutnya diperoleh model state dan Co- State yang digunakan untuk simulasi. Hasil dari simulasi tersebut, menunjukkan bahwa grafik penyebaran penyakit setelah dilakuakn kontrol, pada subpopulasi terinfeksi mengalami penurunan hingga mendektai nol. Sedemikian hingga, subpopulasi yang sembuh mengalami kenaikan. Berarti bahwa kontrol (pemberian obat) yang diberikan efektif untuk meminimukan subpopulasi terinfeksi, karean pada subpopulasi terinfeksi mengalami penurunan.

p-ISSN 2460-9986
e-ISSN 2476-9436

5. DAFTAR PUSTAKA

Guihua Li*, Zhen Jin. 2014. *Global Satbility of a SEIR epidemic model with infectious force in latent, infected and Immune Period*. Science Direct.

Fatmawati dan Tasman. 2015. *An Optimal Control Strategy to reduce the spread of malaria resistance*. Journal of Mathematical Biosciences. Elsevier. Science Direct.

Naidu, D. S. 2002. *Control System*. USA: CRC Press.

Rohmah, A. M., Hariyanto, Imron, C., Kisnosaputra, R. 2017. *Simulasi Model penyebaran Virus Ebola antar dua Negara dengan Runge Kutta Orde 4*. Prosiding Seminar nasional matematika dan Pembelajarannya 2017. Fakultas MIPA UM.