AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 13, No. 3 Desember 2022
e-ISSN 2579-7646

kajian sifat ekor tebal distribusi *mode-centered* burr

[1,2]Jacob Stevy Seleky

[1]Statistic Research Division, Institut Teknologi Bandung, Jalan Ganesa 10, Bandung 40132
[2]Mathematics Education Departmen, Faculty of Education, Pelita Harapan University, Tangerang – Banten 15811
email korespondensi: jacobian@s.itb.ac.id

Abstrak

Distribusi ekor tebal adalah salah satu kajian penting dalam pemodelan statistik. Suatu distribusi dikatakan memiliki sifat ekor tebal jika memenuhi kriteria yang telah dirumuskan berdasarkan teori distribusi ekor tebal. Dalam artikel ini, penulis melakukan kajian sifat-sifat ekor tebal dari distribusi Mode-Centered Burr (MCB) berdasarkan teori distribusi ekor tebal yang sudah dipublikasikan. Berdasarkan hasil kajian dapat diketahui bahwa distribusi MCB memiliki sifat ekor tebal. Akibatnya, dapat disimpulkan bahwa distribusi MCB berekor tebal.

Kata kunci: *distribusi; ekor-tebal; mode-centered Burr*

Abstract

The heavy-tailed distribution is one of the important studies in statistical modeling. A distribution is said to have heavy-tailed properties if it meets the conditions formulated based on the theory of the heavy-tailed distribution. In this article, the author studies the heavy-tailed properties of the Mode-Centered Burr (MCB) distributions based on published theories of heavy-tailed distribution. Based on the study's results, it can be known that the MCB distributions have a heavy-tailed property. As a result, it can be concluded that the MCB distribution is heavy-tailed.

Keywords: *distribution; heavy-tailed; mode-centered Burr*

A. Pendahuluan

Dalam beberapa dekade terakhir, distribusi ekor tebal mendapat perhatian khusus dalam pemodelan statistika. Hal tersebut dikarenakan distribusi ekor tebal dapat digunakan untuk mengukur peluang kejadian tidak umum yang menyebabkan nilai-nilai ekstrim pada ekor distribusi. Banyak fenomena nyata yang telah ditemukan mengikuti sifat ditribusi ekor tebal. Sebagai contoh, distribusi kekayaan yang dimiliki seseorang, ukuran file dalam sistem komputer, durasi koneksi waktu pekerjaan CPU, ukuran halaman web dan risiko yang timbul dalam kegiatan finansial.

Selain karena kegunaannya, distribusi ekor tebal memiliki sifat dan perilaku yang berbeda dengan distribusi normal maupun distribusi ekor tipis lainnya. Oleh karena itu, penelitian terkait distribusi ekor tebal penting untuk terus dikembangkan. Adapun beberapa hasil penelitian yang telah dipublikasikan terkait distribusi ekor tebal antara lain Bryson (1974), yang mempublikasikan artikelnya dengan judul "Heavy-Tailed Distributions : Properties and Test", Sergey dan Dmitry (2014), dalam karya "Heavy-Tailed and Long-Tailed Distributions", Raj Jain (2017), yang mempresentasikan "Introduction to Heavy-Tailed Distributions, Self-Similar Processe, and Long-Range Dependence, Nasim Nicholas Taleb (2020), dengan judul buku "Statistical Consequences of Fat Tails", dan

Jayakrishnan Nair, Adam Wierman, dan Bert Zwart (2021), yang menyusun "The Fundamentals of Heavy Tails: Properties, Emergence, and Estimation".

Menggunakan teori distribusi ekor tebal di dalam literatur-literatur di atas, penulis kemudian mengkaji sifat ekor tebal distribusi Mode-Centered Burr (MCB) (Nair dan Syuhada, 2016). Distribusi MCB adalah hasil modifikasi distribusi Burr Tipe II (Burr, 1942). Distribusi MCB termasuk dalam kelas distribusi neo-normal. Kelas distribusi neo-normal adalah kelompok distribusi yang dapat dibandingkan dalam banyak aspek dengan distribusi normal. Distribusi neo-normal merepresentasikan relaksasi dari distribusi normal terkait dengan sifat kemencengan dan keruncingan data (Choir dkk, 2019). Distribusi MCB merupakan hasil relaksasi dari distribusi normal terkait keruncingan data. Oleh karena itu, distribusi MCB berbentuk simteris seperti distribusi normal (Nair dan Syuhada, 2016).

Artikel ini disusun sebagai berikut, pada bagian metode dibahas teori-teori yang berkaitan dengan definisi maupun cara identifikasi suatu distribusi memiliki sifat ekor tebal. Ada beberapa cara yang digunakan oleh penulis untuk melakukan kajian sifat ekor tebal distribusi MCB. Pada bagian hasil dan pembahasan penulis mengkaji dan menganalisis sifat ekor tebal distribusi MCB menggunakan teori-teori yang telah dijelaskan dalam bagian metode. Sedangkan pada bagian penutup penulis membuat kesimpulan terhadap analisis hasil kajian yang diperoleh.

B. Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam kajian ini adalah studi literatur. Dengan menggunakan teori distribusi ekor tebal berdasarkan literatur-literatur yang sudah dipublikasikan, penulis menganalisis sifat distribusi ekor tebal dari distribusi *Mode-Cetered Burr (MCB).* Oleh karena itu, pada bab ini penulis menjelaskan beberapa kajian teori distribusi ekor tebal yang menjadi rujukan dalam analisis yang dikerjakan.

Suatu distribusi disebut distribusi ekor tebal (*heavy-tailed*) jika distribusi tersebut memiliki ekor yang lebih tebal dari ekor distribusi eksponensial (Bryson, 1974). Untuk pendefinisian secara formal melalui perumusan matematis, perlu dirumuskan suatu fungsi distribusi $F(x)$ dari peubah acak X beserta komplemennya yang dinyatakan sebagai $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. $\bar{F}(x)$ disebut juga fungsi kesintasan, dalam artikel ini focus kajian ekor distribusi adalah pada ekor kanan distribusi yang dapat dinyatakan sebagai $\bar{F}(x) =$

$F(x, \infty)$, $x \in \mathcal{R}$ (Sergey & Dmitry, 2014).

1. Definisi Distribusi Ekor Tebal

Pendefinisian distribusi ekor tebal secara matematis dinyatakan dalam definisi 1 berikut ini.

Definisi 1

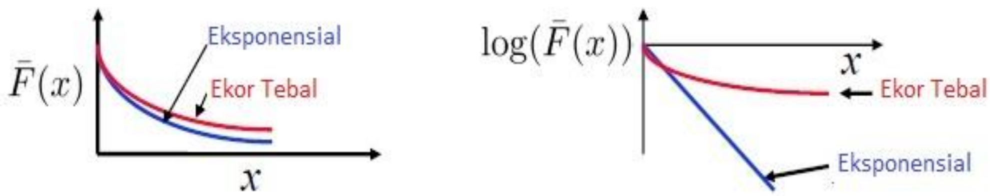
Suatu fungsi distribusi $F(x)$ disebut memiliki ekor tebal jika dan hanya jika untuk setiap $\mu > 0$

$$\limsup_{x\to\infty} \bar{F}(x). e^{\mu x} = \infty \tag{1}$$

sebaliknya, fungsi distribusi $F(x)$ disebut memiliki ekor tipis (*light-tailed*). Suatu peubah acak X disebut memiliki ekor tebal (ekor tipis) jika fungsi distribusinya memiliki ekor tebal (ekor tipis) (Raj Jain, 2017) & (Jayakrishnan Nair, Adam Wierman, dan Bert Zwart, 2021).

Sebagai catatan, definisi distribusi ekor tebal pada persamaan (1) berlaku untuk ekor kanan distribusi, yaitu berkaitan dengan perilaku nilai fungsi peluang yang lebih besar dari x yaitu $x \to \infty$.

Adapun penentuan distribusi eksponensial sebagai batas antara ekor tebal dan ekor tipis dikarenakan distribusi eksponensial berfungsi untuk memisahkan dua kelas distribusi yang memiliki sifat dan karakteristik yang berbeda. Sebagai ilustrasi diberikan Gambar 1. (Raj Jain, 2017)



Gambar 1. Perbandingan Distribusi Eksponensial dan Ekor Tebal

Untuk mempelajari perbedaan antara distribusi berekor tebal dan ekor tipis, dapat digunakan definisi lain dari distribusi ekor tebal sebagai berikut

Lemma 1

Misalkan diketahui peubah acak X, ketiga pernyataan berikut ekivalen

1. X berekor tebal.
2. $M(s) = E[e^{sX}] = \infty, \forall s > 0$.

3. $liminf_{x\to\infty} - \frac{logP(X>x)}{x} = 0.$

Untuk membuktikan *Lemma 1.* perlu ditunjukkan ekivalensi ketiga pernyataan tersebut, yaitu dengan menunjukkan ekivalensi hubungan $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, dan $3 \rightarrow 1$. Dalam artikel ini penulis tidak memberikan

pembuktian secara rinci, untuk pembuktiannya dapat merujuk draft artikel berdasarkan (Jayakrishnan Nair, Adam Wierman, dan Bert Zwart, 2021) dan (Sergey dan Dmitry, 2014). Sebagai catatan sifat (2) dari *Lemma 1* yaitu fungsi pembangkit momen, dalam distribusi ekor tipis dapat digunakan untuk mengkarakterisasi sifat distribusi sedangkan pada ekor tebal hal tersebut tidak dapat digunakan. Selanjutnya untuk mengidentifikasi sifat ekor tebal suatu distribusi dapat digunakan beberapa cara sebagai berikut.

2. Identifikasi Sifat Distribusi Ekor Tebal

Berdasarkan literatur-literatur yang sudah dipublikasikan, terdapat beberapa cara untuk mengidentifikasi sifat ekor tebal suatu distribusi. Kajian cara identifikasi sifat ekor tebal suatu distribusi yang digunakan oleh penulis dalam artikel ini antara lain berdasarkan: 1) Definisi secara matematis pada definisi 1 dan Lemma 1; 2) Keberadaan momen dan kurtosis; 3) Hukum pangkat distribusi dan indeks ekor; 4) *Regularly varying distributions*; dan 5) *Hazard rate.dan long tails distributions*.

Adapun penjelasan ke-empat cara selain cara pertama di atas dilakukan secara umum sehingga tidak membahas sifat-sifat lain yang terkait dengan rinci. Penjelasan mengenai cara identifikasi yang disebutkan di atas dapat dijelaskan sebagai berikut.

a. Keberadaan Momen dan Kurtosis

Menurut Klugman dkk (2012), jika suatu distribusi keberadaan momen tak terpusatnya lengkap maka distribusi tersebut memiliki ekor kanan yang tipis, sedangkan jika keberadaan momen tak terpusat hanya sampai nilai tertentu (tidak lengkap) maka dapat diindikasikan distribusi tersebut memiliki ekor kanan yang tebal. Selain itu, distribusi ekor tebal dapat dikaitkan dengan sifat momen ke-empat, yang disebut kurtosis. Rumus kurtosis dari peubah acak X dapat dinyatakan dalam Persamaan (2).

$$\kappa = \frac{E\left[\left(X - E(X)\right)^4\right]}{\left(Var(X)\right)^2} \tag{2}$$

dengan $E(X)$ adalah mean dari X dan *Var(X)* adalah variansi dari X. Ini berisi tentang ringkasan metode penelitian, meliputi jenis penelitian, setting penelitian, subjek penelitian (populasi dan sampel), teknik pengumpulan data, keabsahan data serta teknik analisis data.

Kurtosis pada distribusi normal adalah 3, distribusi dengan kurtosis lebih besar dari 3 lebih runcing dari distribusi normal yang berakibat ekor distribusi tersebut lebih lambat menuju nol. Distribusi dengan kriteria demikian disebut distribusi ekor tebal. Akibatnya data yang kurtosisnya lebih besar dari tiga memiliki distribusi ekor tebal.

b. Hukum Pangkat dan Indeks Ekor

Loretan dan Phillips (1994) menyatakan bahwa ekor distribusi imbal hasil suatu aset keuangan diasumsikan mengikuti bentuk Pareto-Levy yaitu $P(X > x) = cx^{-\alpha}$ dengan α adalah indeks ekor yang menjadi ukuran keruncingan ekor dan c adalah parameter skala. Semakin kecil nilai α, berakibat semakin lambat ekor distribusi menuju nol, atau semakin tebal ekor distribusi tersebut. Oleh karena itu, nilai α dari suatu distribusi data dapat dijadikan ukuran ketebalan ekornya. Indeks ekor dari suatu distribusi menyatakan keberadaan orde tertinggi momennya. Sehingga indeks ekor bermanfaat untuk mengetahui ketebalan ekor dari suatu distribusi.

c. *Regularly varying distributions*

Salah satu kelas distribusi ekor tebal yang cukup banyak dibicarakan adalah kelas distribusi yang memiliki fungsi berubah secara teratur (*regularly varying*) (Embrecht dkk, 1997). Distribusi yang memiliki sifat berubah secara teratur (*regularly varying*) sesuai dengan sifat pendekatan hukum perpangkatan. Secara khusus dapat dikatakan bahwa sifat distribusi yang berubah secara teratur (*regularly varying*) memiliki sifat pendekatan hukum perpangkatan (*approximately power law*) pada ekor distribusi. Secara formal dapat dinyatakan kelas distribusi yang berubah secara teratur (*regularly varying distributions*) dalam Persamaan (3) berikut.

$$lim_{x\to\infty}\frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} = t^{-\alpha} \tag{3}$$

dengan $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, t suatu bilangan real positif, dan $\alpha \in (0, \infty)$ adalah indeks ekor.

d. Hazard Rate dan *Longtails Distribuitons*

Jayakrishnan Nair, Adam Wierman, dan Bert Zwart (2021), menyatakan bahwa indikasi suatu distribusi ekor tebal dapat dilakukan dengan menggunakan sifat *hazard rate* yang menurun dan sifat ekor panjang (*long tails*) suatu distribusi. *Hazard rate* dirumuskan dalam Persamaan (4) berikut.

$$h(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} \tag{4}$$

dengan *f(x)* adalah fungsi peluang dari X. Dan sifat ekor panjang suatu distribusi dapat dirumuskan dalam Persamaan (5).

$$lim_{x\to\infty}\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)}=1 \tag{5}$$

Berdasarkan definisi, *lemma* dan cara penentuan distribusi ekor tebal yang dijelaskan oleh penulis, pada bab berikutnya penulis mengkaji sifat ekor tebal distribusi *MCB*.

C. Hasil dan Pembahasan

Pembahasan diawali dengan distribusi *MCB* dilanjutkan dengan hasil kajian sifat ekor tebal distribusi *MCB*.

1. Distribusi Mode-Centered Burr (MCB)

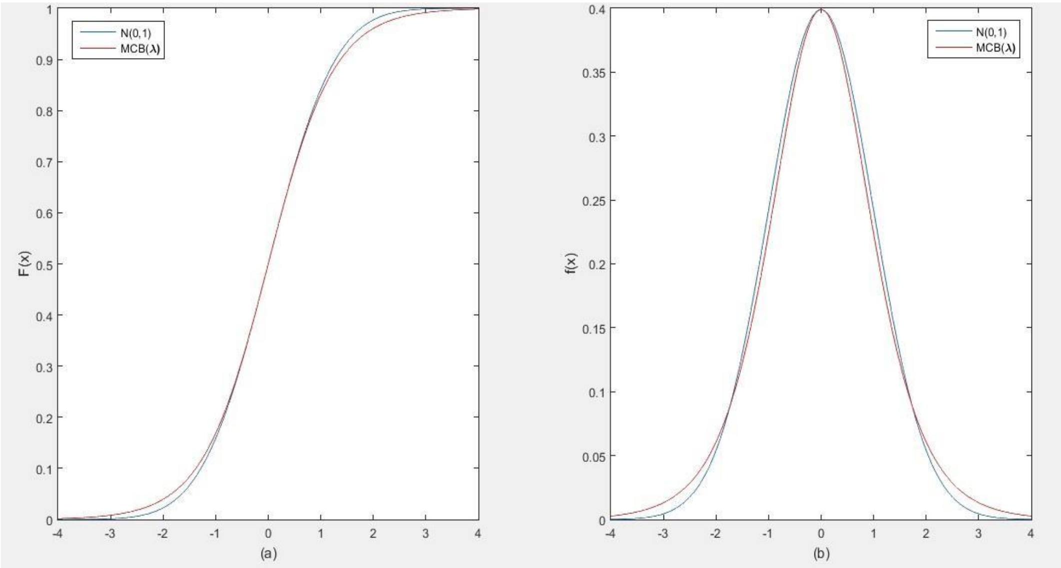
Dalam artikel ini, fokus kajian distribusi adalah distribusi *Mode-Centered Burr (MCB)* (Nair dan Syuhada, 2016). Fungsi distribusi *MCB* adalah hasil modifikasi fungsi distribusi Burr Tipe II (Burr, 1948). Fungsi distribusi *MCB* dinotasikan sebagai *MCB* (λ) dirumuskan dalam Persamaan (6) berikut.

$$F(x)=\frac{1}{(1+e^{-\lambda x})},|x|<\infty \tag{6}$$

dengan $\lambda=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}$.. Sedangkan fungsi peluangnya dinyatakan sebagai berikut

$$f(x)=\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2},|x|<\infty \tag{7}$$

Untuk mendapatkan visualisasi fungsi distribusi dan fungsi peluang distribus *MCB* (λ) diberikan Gambar 2.



Gambar 2. Grafik (a) Fungsi Distribusi dan (b) Fungsi Peluang

Berdasarkan Gambar 2., dapat diketahui bahwa fungsi distribusi dan fungsi peluang dari distribusi *MCB* (λ) memiliki kemiripan dengan distribusi *N (0,1)*. Berdasarkan Nair dan Syuhada (2016), distribusi *MCB* (λ) memiliki ekor yang lebih lambat menuju nol dibandingkan distribusi *N (0,1)*. Selain itu fungsi peluang distribusi *MCB* (λ) dan distribusi *N (0,1)* memiliki puncak sama tinggi yang dapat dilihat pada Gambar 2. (b).

Menggunakan definisi fungsi distribusi dan fungsi peluang distribusi *MCB* (λ), penulis melakukan analisis sifat ekor tebal berdasarkan kajian teori pada bab sebelumnya.

2. Analisis Sifat Ekor Tebal Distribusi MCB

Misalkan $X \sim MCB(\lambda)$ dengan fungsi distribusi $F(x)$ pada persamaan (6), maka dapat ditunjukkan bahwa distribusi *MCB* (λ) memiliki ekor tebal berdasarkan definisi 1 dalam Persamaan (8) berikut ini.

$$\lim_{x\to\infty} \bar{F}(x).e^{\mu x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})}.e^{\mu x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{(\mu-\lambda)x}}{(1+e^{-\lambda x})} = \begin{cases} \infty, & \mu > \lambda \\ 1, & \mu = \lambda \\ 0, & \mu < \lambda \end{cases} \tag{8}$$

Sehingga untuk memenuhi definisi distribusi ekor tebal maka ditentukan $\mu > \lambda$ yang mengakibtkan

$$\lim_{x\to\infty} \bar{F}(x).e^{\mu x} = \infty \tag{9}$$

berdasarkan sifat limit superior berlaku $\limsup_{x\to\infty} \bar{F}(x).e^{\mu x} = \infty$.

Selanjutnya menggunakan *Lemma 1* sifat *(3)*

$$lim_{x\to\infty} -\frac{\log(\bar{F}(x))}{x} = lim_{x\to\infty} -\frac{log\left(\frac{e^{-\lambda x}}{1+e^{-\lambda x}}\right)}{x} = \lambda + lim_{x\to\infty} \frac{log(1+e^{-\lambda x})}{x} \quad (10)$$

Hasil dari $lim_{x\to\infty} \frac{log(1+e^{-\lambda x})}{x} = 0$, dengan demikian berdasarkan sifat limit inferior berlaku

$$\lim_{x\to\infty} inf - \frac{\log(P(X > x))}{x} = \lambda + 0 \quad (11)$$

Hasil diatas menunjukkan bahwa untuk $x \to \infty$bentuk liminf menurun ke 0 tetapi dibatasi pada λ.

Cara penentuan sifat ekor tebal distribusi *MCB* selanjutnya adalah dengan menganalisis keberadaan momen tak terpusat. Rumus momen tak terpusat dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^k \lambda e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2} dx \quad (12)$$

dengan menggunakan substitusi $u = \frac{1}{(1+e^{-\lambda x})}$ diperoleh $du = \frac{x^k \lambda e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2}$, selanjutnya dengan melakukan transformasi x ke dalam u serta perubahan batas integral diperoleh bentuk umum momen tak terpusat sebagai berikut

$$E[X^k] = \frac{(-1)^k}{\lambda^k} \int_0^1 ln^k \left(\frac{1-u}{u}\right) du, \qquad k = 1,2,3, \dots \quad (13)$$

Bentuk integral di atas dapat ditentukan sedemikian sehingga diperoleh $E[X] = E[X^3] = 0$ sedangkan bentuk $E[X^2]$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$E[X^2] = \frac{(-1)^2 2!}{\lambda^2} \left[2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)^2} \right] \quad (14)$$

AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 13, No. 3 Desember 2022
e-ISSN 2579-7646

dan bentuk $E[X^4]$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$E[X^4] = \frac{(-1)^4 4!}{\lambda^4}\left[2 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)^3} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)^4}\right] \quad (15)$$

Berdasarkan hasil di atas dapat diketahui bahwa keberadaan momen tak terpusat distribusi *MCB* (λ) tidak lengkap. Dengan demikian berdasarkan penjelasan pada bab sebelumnya dikarenakan keberadaan momen distribusi *MCB* (λ) tidak lengkap maka hal ini dapat dijadikan sebagai indikator sifat ekor tebal distribusi *MCB* (λ). Berkaitan dengan hal ini, kurtosis dari distribusi *MCB* (λ) dapat ditentukan menggunakan $E[X^2]$ dan $E[X^4]$ yang dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\kappa = \frac{\left(\frac{(-1)^4 4!}{\lambda^4}\left[2+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)^3}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)^4}\right]\right)}{\left(\frac{(-1)^2 2!}{\lambda^2}\left[2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)^2}\right]\right)^2} \quad (16)$$

Untuk penentun nilai numerik kurtosis menggunakan rumus di atas cukup sulit dilakukan, oleh karena itu penulis melakukan simulasi numerik

menggunakan metode transformasi invers distribusi *MCB* (λ) dan mendapatkan hasil numerik yang disajikan dalalm Tabel 1.

Tabel 1. Hasil numerik variansi dan kurtosis.

Ukuran Sampel (n)	Variansi	Kurtosis
10	1.515	4.537
100	1.349	4.075
1000	1.066	3.770

Berdasarkan Tabel 1., dapat diketahui bahwa nilai numerik kurtosis yang diperoleh lebih besar dari 3. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa distribusi *MCB* (λ) memiliki indikasi sifat ekor tebal.

Selanjutnya indikasi sifat ekor tebal dapat ditentukan melalui hukum pangkat, indeks ekor dan *regularly varying distributions*. Loretan dan Phillips (1994) menyatakan bahwa ekor distribusi imbal hasil suatu aset keuangan diasumsikan mengikuti bentuk Pareto-Levy yaitu $P(X > x) = cx^{-\alpha}$ dengan α adalah indeks ekor. Berdasarkan penjelasan sebelumnya diketahui bahwa komplemen fungsi distribusi *MCB* (λ) dapat dinyatakan dalam Persamaan (17).

$$\bar{F}(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{1+e^{-\lambda x}} \sim \frac{1}{1+e^{\lambda x}} \sim \left(1+e^{\lambda x}\right)^{-1} \sim e^{-\lambda x} \quad (17)$$

AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 13, No. 3 Desember 2022
e-ISSN 2579-7646

bentuk $e^{-\lambda x}$ secara aljabar menurun dengan semakin besarnya x. Hal ini dapat diketahui karena $lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x} = 0$. Dengan demikian sifat ini mengikuti sifat

distribusi Pareto yang digunakan sebagai rujukan penentuan sifat ekor tebal suatu distribusi. Selanjutnya penentuan *regularly varying distributions* dapat menggunakan rumus berikut

$$lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} = lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\lambda tx}}{(1+e^{-\lambda tx})} \frac{(1+e^{-\lambda x})}{e^{-\lambda x}} \tag{18}$$
$$= \frac{1}{t} lim_{x\to\infty} e^{(1-t)\lambda x} = \begin{cases} \infty, & t > 1 \\ \frac{1}{t}, & t = 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases}$$

Dalam kasus ini dipilih $t = 1$ sehingga limitnya bernilai 1 yang memenuhi *slowly regularly varying distributions*. Penentuan terakhir indikasi sifat ekor tebal distribusi $MCB(\lambda)$ adalah dengan menentukan *hazard rate*.dan *long tails distributions*. Adapun *hazard rate* dapat

ditentukan menggunakan rumus berikut

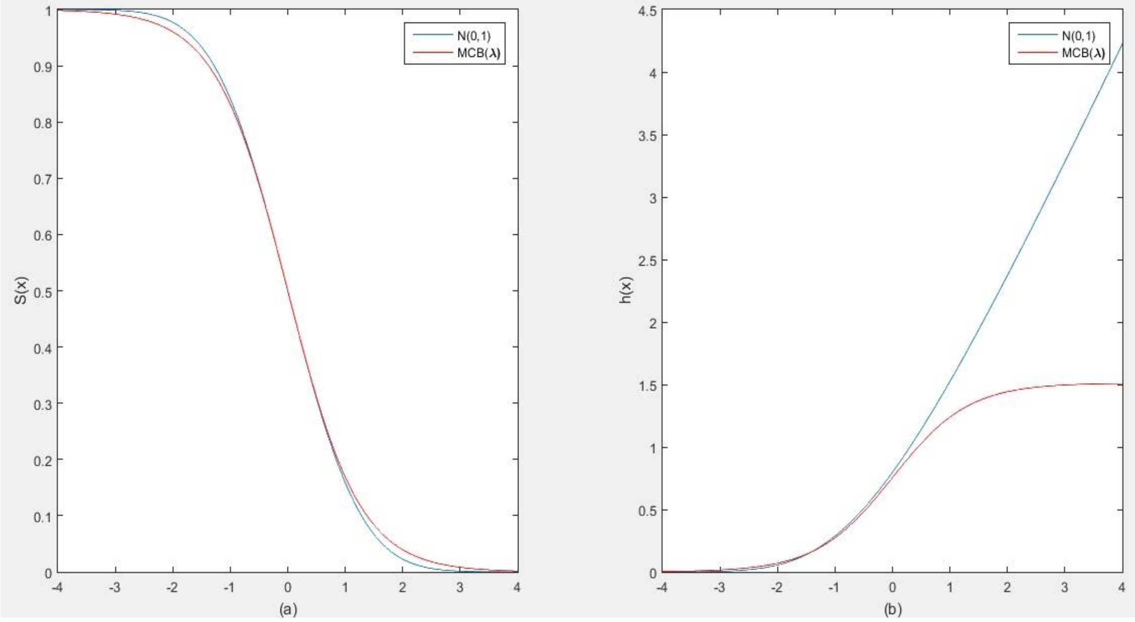
$$h(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2} \frac{(1+e^{-\lambda x})}{e^{-\lambda x}} = \frac{\lambda}{(1+e^{-\lambda x})} \tag{19}$$

Berdasarkan persamaan (19) dapat diketahui bahwa fungsi *hazard rate* adalah fungsi yang menurun dan terbatas di λ. Sedangkan penentuan sifat *long tail* distribusi $MCB\ (\lambda)$ dapat menggunakan perumusan Persamaan (20).

$$lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)} = e^{-\lambda t} lim_{x\to\infty} \frac{(1+e^{-\lambda x})}{(1+e^{-\lambda(x+t)})} = e^{-\lambda t} \tag{20}$$

Dengan membuat penyebut sekecil mungkin maka nilainya akan semakin dekat ke satu sehingga mendekat sifat *long tail* suatu distribusi. Berdasarkan Jayakrishnan Nair, Adam Wierman, dan Bert Zwart, (2021) semua distribusi yang mempunyai *long tail* pasti berdistribusi ekor tebal. Selain itu, fungsi *hazard rate* yang menurun juga sebagai salah satu indikasi ekor tebal suatu distribusi. Sebagai visualisasi fungsi komplementer dari fungsi distribusi atau disebut fungsi kesintasan dan fungsi *hazard* dapat melihat Gambar. 3. berikut

AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 13, No. 3 Desember 2022
e-ISSN 2579-7646



Gambar 3. Grafik (a) Fungsi Kesintasan (b) Fungsi *hazard*

Berdasarkan Gambar 3., dapat diketahui fungsi *hazard* menurun pada saat melewati puncak kurva tetapi dibatas pada nilai tertentu, hal ini sebagai bukti indikasi sifat ekor tebal distribusi *MCB* (λ).

D. Simpulan

Berdasarkan hasil kajian dan analisis sifat ekor tebal distribusi *MCB* (λ) menggunakan definisi dan cara-cara yang diusulkan berdasarkan teori-teori distribusi ekor tebal yang telah dipublikasikan, maka dapat disimpulkan bahwa distribusi *MCB* (λ) memiliki sifat ekor tebal. Ada beberapa kriteria yang tidak dipenuhi secara penuh, tetapi hampir sebagian besar kriteria sifat ekor tebal yang diusulkan terpenuhi. Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa distribusi *MCB* (λ) adalah distribusi yang mirip dengan distribusi *N (0,1)* tetapi memiliki sifat ekor tebal.

E. Daftar Pustaka

Bryson, M.C. (1974). Heavy-Tailed Distributions: Properties and Test. *Technometrics Jounal*. Vol. 16(1), 61 – 68.

Burr, I.W. (1942). Cumulative frequency functions. *Journal of Annual Mathematics and Statistics*. Vol. 13(2), 215--232.

Choir, A.S, Iriawan, N, Ulama, B.S.S & Dokhi, M. (2019). MSEPBurr Distribution: Properties and Parameter Estimation. *Pakistan Journal of Statistcs and Operation Research*. 179--193.

Jayakrishnan Nair, Adam Wierman, & Bert Zwart (2021), *The Fundamentals of Heavy Tails: Properties, Emergence, and Estimation*. Book Draft.

Klugman,S.A, Panjer, H.H & Willmot, G.E. (2012). *Loss models: from data to decisions*. Publisher:John Wiley & Sons.

Loretan, M & Phillips, P. C. (1994). Testing the covariance stationarity of heavy-tailed time series: An overview of the theory with applications to several financial datasets. *Journal of empirical finance*. Vol. 1(2), 211-248.

Nair, G & Syuhada, K. (2016). Stochastic Volatility Model with Burr Distribution Error: Evidence from Australian Stock Returns. *Journal of Thailand Statistician*. Vol. 14(1), 1--14.

Nasim Nicholas Taleb (2020), *Statistical Consequences of Fat Tails*. STEM Academic Press.

Raj Jain (2017), Introduction to Heavy-Tailed Distributions, Self-Similar Processe, and Long-Range Dependence. Materi Presentasi pada *http: //www. cse.wustl.edu/~jain/cse567-17/*.

R. F. A. J. McNeil & P. Embrechts. (2005). *Quantittive Risk Management*. Princeton University Press.

Sergey, S. & Dmitry K. (2014), Heavy-Tailed and Long-Tailed Distributions. *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering.*