OPERASI HITUNG PADA BILANGAN KABUR

Rasiman[a]

[a] Program Studi Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP PGRI

Jl. Dr. Cipto-Lontar No1 Semarang Telp. (024)8316377 Faks (024) 8448217

Abstrak

Perkembangan matematika pada abad ke-20 relatif cepat sesuai dengan kebutuhan pengguna matematika dalam menunjang perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Salah satu materi matematika yang berkembang adalah himpunan dan bilangan kabur. Istilah kabur diterjemahkan dari kata fuzzy, sehingga timbul istilah fuzzy set (himpunan kabur), fuzzy number (bilangan kabur), dan sebagainya. Dalam kehidupan sehari-hari gejala kekaburan banyak dijumpai, misalnya: (1). "kumpulan siswa yang pandai", (2)."kumpulan kurang lebih 15", dan (3). "kecepatan mobil sekitar 100 km/jam". Contoh-contoh tersebut berbeda dengan: (4). "siswa yang mempunyai sepeda", (5)."anaknya 3 orang". Contoh 4 dan 5 termasuk himpunan tegas sedangkan contoh 1, 2, dan 3 disebut himpunan tak tegas (kabur).

Zadeh (1960), mengatakan bahwa sistem analisis matematika tradisional yang dikenal sampai saat bersifat terlalu eksak, sehingga tidak dapat berfungsi dalam banyak masalah dunia nyata yang sering amat kompleks. Terobosan baru yang diperkelnalkan oleh Zadeh adalah memperluas konsep himpunan klasik (tegas) menjadi himpunan kabur. Dalam himpunan tegas, fungsi karakteristik dari himpunan A, bernilai 0 atau 1. Sedangkan dalam himpunan kabur fungsi karakteristik menggunakan konsep fungsi keanggotaan (membership function), yang nilainya berada dalan selang tertutup [0,1]. Konsep tentang himpunan kabur ini, berkembang meluas dalam konsep bilangan kabur. aplikasinya dalam bentuk besaran yang dinyatakan dengan bilangan yang tidak tepat, misalnya "sekitar 4 km", "mendekati 10". Berkaitan dengan konsep bilangan kabur, tidak terlepas dari operasi hitung dasar yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian , dan pembagian pada bilangan kabur.

Kata Kunci : Himpunan Kabur, bilangan kabur, operasi hitung

A. Pendahuluan

Kita mulai dengan deskripsi dasar tentang bilangan (Dubois dan Prade 1979a,b, 1980; Djikman, van Haringen, dan De Lange 1983; Kaufmann dan Gupta 1988). Beberapa definisi telah diberikan. Sebuah definisi yang pragmatis menyatakan bilangan kabur sebagai pemetaan dari garis real R ke interval satuan yang memenuhi sifat-sifat seperti normalitas, unimodalitas, kontinuitas, dan pendukung terbatas. Persyaratan-persyaratan ini dapat diperlunak jika diperlukan. Misalnya, sifat kontinuitas diganti dengan semikontinu atas. Menggunakan terminologi analisis interval, beberapa sifat di atas dapat dimaknai ke dalam persyaratan yang berorientasi himpunan. Misalnya, unimodalitas dan pendukung terbatas dimaknai sebagai potongan- α yang konveks dan potongan- α tertutup pada R, dengan $\alpha \in [0 , 1]$.

Suatu bilangan kabur bersifat normal, sebab bilangan kabur kurang lebih a mempunyai fungsi keanggotaan yang nilainya 1 untuk x = a. Sedangkan sifat yang lainnya digunakan untuk mendefinisikan operasi aritmetika (penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian) pada bilangan-bilangan kabur.

Bilangan kabur yang paling banyak digunakan dalam aplikasi adalah bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan segitiga, yang disebut bilangan kabur segitiga. Dengan demikian bilangan kabur segitiga memenuhi keempat sifat bilangan kabur seperti yang didefinisikan di atas.

B. Pembahasan

1. Bilangan Kabur Segitiga

Dalam bagian ini perhatian kita terfokus pada kumpulan bilangan kabur segitiga. Ada model yang paling sederhana dari besaran numerik tak tentu. Fokus analisis pada kelas ini memperkenalkan kita sifat yang paling nyata dari aritmetika kabur. Perhatikan dua bilangan kabur A = (x; a, m, b) dan B= (x; c, n, d). Lebih khusus lagi, fungsi keanggotaan dari kedua bilangan ini didefinisikan melalui penggalan fungsi linier terhubung berikut:

$$A(x;a,m,b)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{m-b}, & \text{jika } x\in[a,m) \\ \dfrac{b-x}{b-m}, & \text{jika } x\in[m,b] \\ 0, & \text{untuk yang lain}\end{cases}$$

$$B(x;c,n,d)=\begin{cases}\dfrac{x-c}{n-c}, & \text{jika } x\in[c,n) \\ \dfrac{d-x}{d-n}, & \text{jika } x\in[n,d] \\ 0, & \text{untuk yang lain}\end{cases}$$

Nilai modal (m dan n) menunjuk suatu nilai yang dominan (penciri) dari kuantitas yang sesuai, sementara batas bawah (a atau c) dan batas atas (b atau d) mencerminkan perluasan konsep itu. Selanjutnya, untuk menyederhanakan komputasi, untuk sementara kita perhatikan bilangan kabur dengan batas bawah positip.

2. Analisis Interval Bilangan Kabur

Akar komputasi dengan bilangan kabur berasal dari analisis interval (Moore, 1966). Cabang matematika yang dikembangkan untuk keperluan ini adalah kalkulus toleransi. Dalam kaitan ini, objek dasar yang menjadi pusat perhatian adalah interval dalam R, seperti [4 , 6], [a , b], [-1,5 , 3,2] dan seterusnya. Formula yang dihasilkan menggambarkan operasi-operasi aritmetika dasar: penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian.

Definisi

a. $[a , b] \oplus [c , d] = [a + c, b + d]$

b. $[a , b] - [c , d] = [a - d, b - c]$

c. $[a , b] \otimes [c , d] = [\min(ac, ad, bc, bd) , \max(ac, ad, bc, bd)]$

d. $[a , b] / [c , d] = [\min(a/c, a/d, b/c, b/d) , \max(a/c, a/d, b/c, b/d)]$

Sebagai contoh, tentukan nilai dari penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dari [2 , 7] dan [-5, 1]

Penyelesaian :

a. $[a , b] \oplus [c , d] = [a + c, b + d]$

$$[2 , 7] \oplus [-5 , 1] = [2 -5, 7 + 1] = [-3, 8]$$

b. $[a , b] - [c , d] = [a - d, b - c]$

$$[2 , 7] - [-5 , 1] = [2 - 1, 7 - (-5)] = [1, 12]$$

c. $[a , b] \otimes [c , d] = [\min(ac, ad, bc, bd) , \max(ac, ad, bc, bd)]$

$$[2 , 7] \otimes [-5 , 1] = [\min(-10, 2, -35, 7) , \max(-10, 2, -35, 7)] = [-35, 7]$$

d. $[a , b] / [c , d] = [\min(a/c, a/d, b/c, b/d) , \max(a/c, a/d, b/c, b/d)]$

$$[2 , 7] / [-5 , 1] = [\min(2/-5, 2/1, 7/-5, 7/1), \text{maks}(2/-5, 2/1, 7/-5, 7/1)] = [-7/5 , 7]$$

3. Penjumlahan

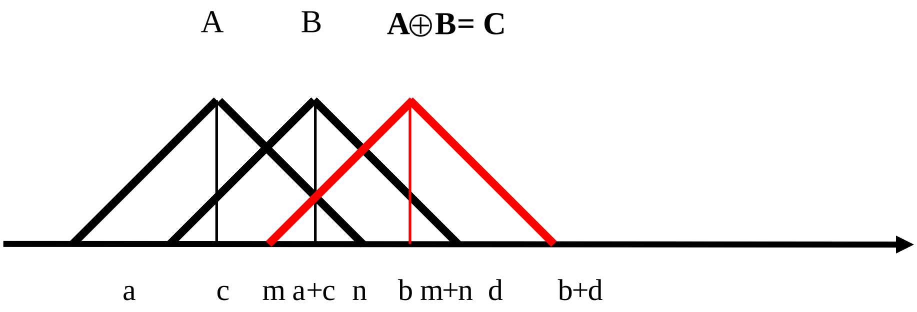
Penerapan prinsip perluasan pada A dan B menghasilkan

$$C(z) = \sup_{x,y \in \mathrm{R}:\, z = f(x,y)} A(x) \wedge B(y) \ .$$

Bilangan kabur yang dihasilkan adalah normal; yakni $C(z) = 1$ untuk $z = m + n$. Dua kasus yang memperhatikan komputasi perluasan C dilakukan secara terpisah.

Pertama, perhatikan $z < m + n$. Dalam situasi ini, kalkulasi melibatkan bagian yang meningkat dari fungsi keanggotaan A dan B. Terdapat nilai x dan y sedemikian hingga $x < m$ dan $y < n$ dan memenuhi hubungan

$A(x) = B(y) = \omega$, $\omega \in [0,1]$



Gambar 1: Penjumlahan bilangan Kabur Segitiga

Bagian yang naik secara linier dari fungsi keanggotaan *A* dan *B* (lihat Gambar 1) terdapat pada selang [a,n]. Berdasar pada hal tersebut, diturunkan:

$$\frac{x-a}{m-a}=\omega$$

begitu juga dengan

$$\frac{y-c}{n-c}=\omega$$

$x \in [a,m]$ dan $y \in [c,n]$.

Dengan menyatakan x dan y sebagai fungsi dari ω, diperoleh

$$x = a + (m - a)\omega$$

$$y = c + (n - c)\omega.$$

Selanjutnya, karena $z = x + y$, hal ini menghasilkan

$$z = x + y = a + (m - a)\omega + c + (n - c)\omega. = a + c + (m+n - a - c)\omega.$$

Sekarang kita turunkan hubungan yang serupa untuk bagian yang turun secara linier dari fungsi keanggotaan *A* dan *B*. Formula berikut berlaku untuk keadaan $x\in [m,b]$ dan $y \in [n,d]$:

$$1-\frac{x-m}{b-m}=\omega,$$

$$1-\frac{y-n}{d-n}=\omega,$$

Atau secara ekivalen

$$x = m + (1 - \omega)(b - m)$$

$$y = n + (1 - \omega)(d - n)$$

Dengan menambahkan *x* dan *y* memberikan

$$z = x + y = m + (1 - \omega)(b - m) + n + (1 - \omega)(d - n)$$

$$= m + n + (1 - \omega)(b+d - m - n)$$

Secara ringkas, fungsi keanggotaan dari $A \oplus B$ sama dengan

$$C(z)=\begin{cases} \dfrac{z-(a+c)}{(m+n)-(a+c)} & \text{jika } z<m+n \\ 1 & \text{jika } z=m+n \\ 1-\dfrac{z-(m+n)}{(b+d)-(m+n)} & \text{jika } z>m+n \end{cases}$$

Ternyata, C juga merupakan suatu fungsi keanggotaan segitiga. Untuk mempertegas C, kita singkat dengan notasi :

$C=(x;a+c,m+n,b+d)$ yang ditunjukkan pada Gambar 1.

Secara umum, jika bilangan-bilangan kabur segitiga ditambahkan, maka hasilnya suatu himpunan kabur berbentuk segitiga juga. Lebih tepatnya, jika $A_i=(x;a_i,m_i,b_i)$, $i=1,2,...,n$., maka jumlah dari bilangan-bilangan ini sama dengan

$$A=\sum_{i=1}^{n}A_i,\quad A=(x;a,m,b)=A(x;\sum_{i=1}^{n}a_i,\sum_{i=1}^{n}m_i,\sum_{i=1}^{n}b_i).$$

Kita dapat mengamati bahwa penyebaran dari hasilnya berakumulasi dari awal. Sebagai contoh, misalkan $m_i=1,\ a_i=0.95,\ b_i=1.05$ untuk semua $i=1,2,...,n.$ Dengan iterasi, didapatkan sebuah barisan bilangan-bilangan kabur

$A_1 \oplus A_2$= (x, 1.90, 2.00, 2.10),

$A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$ = (x, 2.85, 3.00, 3.15)

Penjumlahan dua bilangan kabur dengan menggunakan potongan-α:

Misalkan bilangan kabur $\tilde{2}$ dan $\tilde{5}$ mempunyai fungsi keanggotaan segitiga sebagai berikut:

$$\tilde{2}=A(x;0,2,4)=\begin{cases} 0 & \text{untuk } x\le 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{untuk } 0\le x\le 2 \\ \dfrac{4-x}{2} & \text{untuk } 2\le x\le 4 \\ 0 & \text{untuk } x\ge 4 \end{cases}$$

$$\tilde{5}=B(x;2,5,8)=\begin{cases} 0 & \text{untuk } x\le 2 \\ \dfrac{x-2}{3} & \text{untuk } 2\le x\le 5 \\ \dfrac{8-x}{3} & \text{untuk } 5\le x\le 8 \\ 0 & \text{untuk } x\ge 8 \end{cases}$$

Ambil potongan-α untuk $\alpha\in[0,1]$, $\alpha=A(2_\alpha^-)=A(2_\alpha^+)$ yaitu

$$\alpha=\frac{2_\alpha^-}{2}=\frac{4-2_\alpha^+}{2}$$

sehingga diperoleh: $2^-_\alpha = 2\alpha$ dan $2^+_\alpha = 4 - 2\alpha$

Jadi potongan α dari $\tilde{2}$ adalah $2_\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha]$ juga potongan-α untuk $\alpha \in [0,1]$,

$\alpha = B(5^-_\alpha) = B(5^+_\alpha)$ yaitu $\alpha = \dfrac{5^-_\alpha - 2}{3} = \dfrac{8 - 5^+_\alpha}{3}$

sehingga diperoleh: $5^-_\alpha = 3\alpha + 2$ dan $5^+_\alpha = 8 - 3\alpha$

Jadi potongan α dari $\tilde{5}$ adalah $5_\alpha = [3\alpha + 2, 8 - 3\alpha]$

Dengan demikian potongan α dari bilangan kabur $\tilde{2}$ + $\tilde{5}$ adalah $(2 + 5)_\alpha$ = $[5\alpha + 2, 12 - 5\alpha]$

Karena $5\alpha + 2$ dan $12 - 5\alpha$ adalah fungsi fungsi liner dari α dengan nilai berturut-turut α = 0 adalah bernilai 2 dan 12 serta berturut-turut α = 1 adalah keduanya bernilai 7, maka bilangan kabur $\tilde{5} + \tilde{2}$ adalah bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan:

$$\tilde{2} \oplus \tilde{5} = C(x; 2, 7, 12) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } x \le 2 \\ \dfrac{x-2}{5} & \text{untuk } 2 \le x \le 7 \\ \dfrac{12-x}{5} & \text{untuk } 7 \le x \le 12 \\ 0 & \text{untuk } x \ge 12 \end{cases}$$

4. Perkalian

Seperti dalam penjumlahan, peta kita lihat pada bagian peningkatan fungsi keanggotaan, yang dinyatakn sebagai berikut

$x = \omega(m\text{-}a)+a$

$y = \omega(n\text{-}c)+c$

Dan hasil perkaliannya adalah

$z = xy = [\omega(m\text{-}a)+a][\omega(n\text{-}c)+c]$

$\quad = ac + \omega x(m\text{-}a) + \omega a(n\text{-}c) + \omega^2 (n\text{-}a)(n\text{-}c) = F_1(c)$

Jika ac≤z≤mn, maka fungsi keanggotaan dari C adalah kebalikan dari

$F_1 : (A \otimes B)(z) = F_1^{-1}(z)$

Demikian pula, mempertimbangkan penurunan bagian A dan B, yang berarti bahwa mn≤z≤bd:

$z = xy = [m+(1\text{-}\omega)(b\text{-}m)][n+(1\text{-}\omega)(d\text{-}n)]$

$\quad = mn + (1\text{-}\omega)[b\text{-}m+d\text{-}n] + (1\text{-}\omega)^2 (b\text{-}m)(d\text{-}n) = F_2(c)$

Seperti sebelumnya, untuk beberapa z di [mn,bd] diperoleh

$(A \otimes B)(z) = F_2^{-1}(z)$

Jelas, perkalian tidak mengembalikan sebuah fungsi keanggotaan liner sepotong-sepotong dan menghasilkan bentuk kuadrat dari bilangan kabur. Linearitas bentuk kuadrat ini dapat dianggap pendekatan dari fungsi keanggotaan diturunkan sebelumnya. Kita peroleh bahwa linearisasi ini terdiri dari dua fungsi linear dengan Cz=mn, ac, dan bd. Kualitas linearisasi ini sangat tergantung pada rentangan dari bilangan kabur itu. Untuk mengukur kesalahan linearisasi yang dihasilkan, perhatikan bahwa m=n=1 dan a=1-δ, c=1-δ, b=1, dan d=1+δ.

Contoh Perkalian bilangan kabur segitiga

Bilangan kabur $\tilde{2}$ = (x; 0, 2, 4) dan $\tilde{3}$ = (x; 2, 3, 4). mempunyai fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$A(x;0,2,4)=\begin{cases} \frac{x}{2} & , \text{ jika } x \in [0,2) \\ \frac{4-x}{2} & , \text{ jika } x \in [2,4] \\ 0 & , \text{ untuk yang lain} \end{cases}$$

$$B(x;2,3,4)=\begin{cases} x-2, & \text{jika } x \in [2,3) \\ 4-x, & \text{jika } x \in [3,4] \\ 0, & \text{untuk yang lain.} \end{cases}$$

Jika $0 \leq z < 6$ (bagian yang naik)

$z = xy = F_1(\omega) = ac + \omega c(m-a) + \omega a(n-c) + \omega^2 (m-a)(n-c)$

$= 0.2 + 2\omega(2-0) + 0\omega(3-2) + \omega^2(2-0)(3-2)$

$z = F_1(\omega) = 0 + 4\omega + 0 + 2\omega^2$

$z = 4\omega + 2\omega^2$

$F_1^{-1}(z) = \sqrt{1+\frac{z}{2}} - 1$

Jika $6 \leq z \leq 16$ (bagian yang menurun)

$z = xy = F_2(\omega) = mn + (1-\omega)[b-m+d-n] + (1-\omega)^2 (b-m)(d-n)$

$= 2.3 + (1-\omega)[4-2+4-3] + (1-\omega)^2(4-2)(4-3)$

$= 6 + (1-\omega)(3) + (1-\omega)^2(2)(1)$

$z = 6 + 3(1-\omega) + 2(1-\omega)^2$

$F_2^{-1}(z) = 1 - \left[\sqrt{\frac{8z-39}{16}} - \frac{3}{4}\right]$

Sehingga diperoleh fungsi keanggotaan dari $\tilde{2} \otimes \tilde{3}$ adalah sebagi berikut:

$$C(z;0,6,16)=\begin{cases}\sqrt{1+\dfrac{z}{2}}-1 & ,\ \text{jika } z\in[0,6) \\ 1-\left[\sqrt{\dfrac{8z-39}{16}}-\dfrac{3}{4}\right] & ,\ \text{jika } z\in[6,16] \\ 0 & ,\ \text{untuk yang lain}\end{cases}$$

5. Pembagian

Seperti perkalian, operasi pembagian tidak menjaga linieritas argumen fungsi keanggotaan. Untuk meningkatkan bagian A dan B, ekspresi berikut berlaku untuk

$$z\in\left[\frac{a}{c},\frac{m}{n}\right] \text{ dengan } z=\frac{x}{y}=\frac{\omega(m\text{-}a)+a}{\omega(n\text{-}c)+c}=G_1(\omega)$$

Sehingga

$(A/B)(z) \ = G_1^{-1}(z)$

Secara analog, untuk $z\in[m/n,\ b/d]$ diperoleh

$$z=\frac{x}{y}=\frac{m+(1\text{-}\omega)(b\text{-}m)}{n+(1\text{-}\omega)(d\text{-}n)}=G_2(\omega)$$

Yang mengarah pada bentuk

$(A/B)(z) \ = G_2^{-1}(z)$

Perhatikan bahwa fungsi keanggotaan A/B adalah fungsi rasional dari z. Pada bagian berikut, diperoleh rumus rinci untuk fungsi tunggal-argumen yang dipilih operasi pada bilangan kabur segitiga. Secara umum, hasilnya adalah bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan nonlinier.

Contoh Pembagian bilangan kabur segitiga

Bilangan kabur $\tilde{2}$ = (*x*; 0, *2*, *4*) dan $\tilde{3}$ = (*x*; *2*, *3*, *4*). mempunyai fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$A(x;0,2,4)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & \text{jika } x\in[0,2) \\ \dfrac{4\text{-}x}{2}, & \text{jika } x\in[2,4] \\ 0, & \text{untuk yang lain}\end{cases}$$

$$B(x;2,3,4)=\begin{cases}x-2, & \text{jika } x\in[2,3) \\ 4-x, & \text{jika } x\in[3,4] \\ 0, & \text{untuk yang lain.}\end{cases}$$

Jika $0/2 \leq z < 2/3$ (bagian yang naik)

$$z = \frac{x}{y} = \frac{\omega(m\text{-}a)+a}{\omega(n\text{-}c)+c} = G_1(\omega)$$

$$z = G_1(\omega) = \frac{\omega(2-0)+0}{\omega(3-2)+2}$$

$$z = G_1(\omega) = \frac{2\omega}{\omega+2}$$

$$G_1^{-1}(z) = -\frac{2z}{z-2}$$

Jika $2/3 \leq z \leq 4/4$ (bagian yang menurun)

$$z = x/y = G_2(\omega) = \frac{m+(1\text{-}\omega)(b\text{-}m)}{n+(1\text{-}\omega)(d\text{-}n)}$$

$$= \frac{2+(1-\omega)(4-2)}{3+(1-\omega)(4-3)}$$

$$= \frac{4\text{-}2\omega}{4\text{-}\omega}$$

Sehingga diperoleh

$$G_2^{-1}(z) = \frac{4-4z}{2-z}$$

Sehingga diperoleh fungsi keanggotaan dari $\tilde{2}/\tilde{3}$ adalah sebagi berikut:

$$C(z;\frac{0}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{4}) = \begin{cases} -\dfrac{2z}{z-2} & ,\ \text{jika } z \in [\frac{0}{2},\frac{2}{3}) \\ \dfrac{4-4z}{2-z} & ,\ \text{jika } z \in [\frac{2}{3},\frac{4}{4}] \\ 0 & ,\ \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

C. **Penutup**

Saat ini konsep bilangan kabur sangat dibutuhkan dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam aplikasinya. Teori bilangan kabur biasanya dinyatakan dalam bentuk besaran, misalnya kurang lebih 10 kg, kira-kira 5 jam, dan sebagainya.

Secara intuitif dapat diterima bahwa ungkapan kurang lebih 10 kg dapat dinyatakan dengan suatu himpunan kabur pada semesta R, dimana bilangan 10 mempunyai derajad keanggotaan sama dengan

1, bilangan-bilangan sekitar 10 mempunyai derajad keanggotan kurang 1, dan semakin jauh bilangan itu dari 10 maka derajad keanggotaannya semakin mendekati 0.

Secara formal bilangan kabur didefinisikan sebagai himpunan kabur dalam semesta himpunan semua bilangan real R yang memenuhi 4 sifat : normalitas, unimodalitas, kontinuitas, dan pendukung terbatas. Bilangan kabur yang banyak digunakan dalam aplikasi adalah yang fungsi keanggotaannya segitiga, yang disebut bilangan kabur segitiga.

Setiap kali kita membicarakan bilangan kabur, maka tidak bisa lepas dari operasi dasar bilangan kabur, yaitu : penjumlahan, pengurangan, perkalian , dan pembagian. Untuk memahami operasi-operasi tersebut harus didasari beberapa konsep antara lain analisis interval bilangan kabur dan potongan-α bilangan kabur.

Daftar Pustaka

Frans Susilo. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur Serta Aplikasinya.* Yogyakarta : Graha Ilmu

Klir, G.J, St.Clair, U.H and Yuan B. 1997. *Fuzzy Set Theory : Foundations and Aplications.* Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall

Pedrycz, Witold, dan Gomide, Fernando. 1998. *An Introduction To Fuzzy Sets: Analysis and Design*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Zadeh, LA and Kacprzyk J. 1992. *Fuzzy Logic For The Management of Uncertainty.* New York : John Wiley.