APLIKASI STRUKTUR GRUP YANG TERKAIT DENGAN KOMPOSISI TRANSFORMASI PADA BANGUN GEOMETRI

Mujiasih [a]

[a] Program Studi Matematika Jurusan Tadris Fakultas Tarbiyah IAIN Walisongo

Jl. Prof. Dr. Hamka Kampus II Ngaliyan Semarang

Telp.(024)7601295 Faks.(024)7615387

Abstrak

Komposisi transformasi diantaranya meliputi pencerminan dan rotasi. Komposisi transformasi dapat dilakukan secara aljabar yaitu dengan menggunakan perkalian matriks-matriks yang bersesuaian yang mewakili masing-masing transformasi tersebut. Suatu himpunan yang beranggotakan unsur-unsur komposisi transformasi dapat membentuk sebuah grup. Hal itu dapat ditunjukkan melalui tabel cayley komposisi transformasi.

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai pola-pola seperti pada : lantai keramik, ukiran Jepara, kain batik, hiasan dinding, dan lain-lain. Pola-pola tersebut dapat diperoleh melalui transformasi bangun geometri datar, yaitu lingkaran, segitiga, dan tembereng lingkaran. Bangun-bangun geometri tersebut apabila dikombinasikan, akan menghasilkan pola-pola yang indah dan menarik.

Kata kunci : komposisi transformasi, geometri datar, grup

A. Pendahuluan

Komposisi bangun geometri datar yang dibicarakan dalam bahasan di sini dibatasi pada transformasi yang berupa *pencerminan* (refleksi) dan *rotasi* (perputaran). Adapun pencerminan-pencerminan tersebut adalah:

1) Pencerminan terhadap sumbu X, dinotasikan dengan $P_1 = P_x$;
2) Pencerminan terhadap sumbu Y, dinotasikan dengan $P_2 = P_{y;}$
3) Pencerminan terhadap garis y = x, dinotasikan dengan $P_3 = P_{y\,=\,x}$; dan
4) Pencerminan terhadap garis y = -x, dinotasikan dengan $P_4 = P_{y\,=\,-x}$.

Sedangkan rotasi yang dimaksud adalah:

i). Rotasi berpusat di titik O(0,0), yakni titik potong sumbu X dengan sumbu Y, dengan sudut putar sejauh 90^0 berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam, dinotasikan dengan $R_+ = R_{90^0}$;

ii). Rotasi berpusat di titik O(0,0), yakni titik potong sumbu X dengan sumbu Y, dengan sudut putar sejauh 90^0 searah dengan arah putaran jarum jam, dinotasikan dengan $R\_ = R_{-90^0}$;

iii). Rotasi berpusat di titik O(0,0), yakni titik potong sumbu X dengan sumbu Y, dengan sudut putar sejauh 180^0, dinotasikan dengan $R^2 = R_{180^0}$.

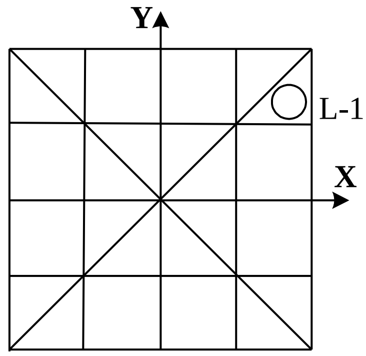
` Selain pencerminan dan rotasi di atas, digunakan pula rotasi dengan sudut putar 0^0 atau pencerminan terhadap bangun datar itu sendiri, yang selanjutnya disebut dengan *identitas* dan dilambangkan dengan " I ". Dengan demikian ada 8 (delapan) unsur yang terlibat dalam pembahasan komposisi transformasi bangun geometri datar tersebut. Sedangkan komposisi transformasi menggunakan lambang " o " (baca : bundaran), yang diartikan sebagai "diteruskan atau dilanjutkan dengan". Misalkan suatu obyek lingkaran 1 (L-1) dicerminkan terhadap garis y = x, menghasilkan bayangan lingkaran 2 (L-2) kemudian dilanjutkan, bayangannya diputar $R\_$, menghasilkan bayangan lingkaran 3 (L-3), maka ungkapan tersebut dapat dilambangkan dengan :

$(R\_ \text{ o } P_3)(L\text{-}1) = R\_\ (L\text{-}2) = L\text{-}3$.

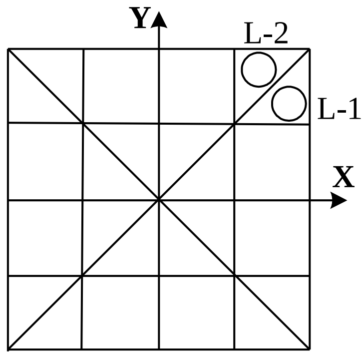
B. Pola-Pola yang Terjadi pada Transformasi Bangun-Bangun Geometri Datar

Bangun-bangun datar yang dijadikan obyek dalam melakukan transformasi adalah: (a) lingkaran, (b) segitiga, dan (c) tembereng lingkaran. Uraian selengkapnya sebagai berikut.

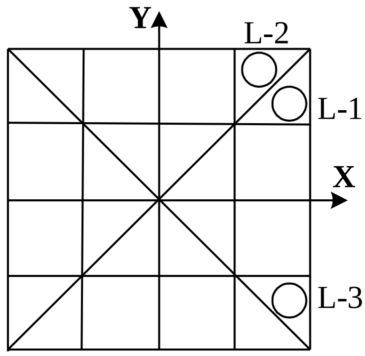
a. Lingkaran.



Gambar a.1



Gambar a.2



Gambar a.3

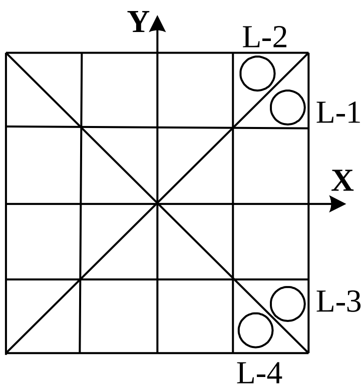
1). Perhatikan Gambar a.1.

Jika L-1 dicerminkan terhadap garis y = x (P_3), akan menghasilkan bayangan L-2, seperti tampak pada Gambar a.2.

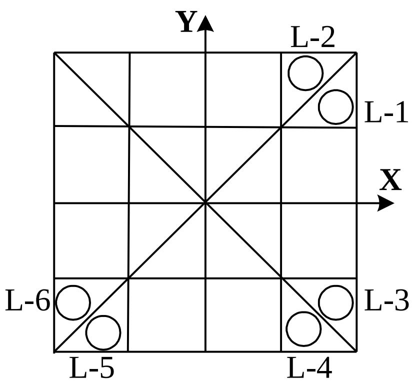
2). Perhatikan Gambar a.3.

Jika L-1 dicerminkan terhadap sumbu X (P_1), akan menghasilkan bayangan L-3. Lingkaran 3 (L-3) dapat juga dihasilkan dari L-2 diputar sejauh 90^0 searah dengan arah putaran jarum jam dengan pusat titik O(0,0), yaitu titik potong sumbu X dengan sumbu Y ($R_{\_}$). Dengan menggunakan komposisi transformasi, maka dapat dijelaskan bahwa : L-1 dicerminkan terhadap garis y = x (P_3) menghasilkan bayangan L-2, kemudian dilanjutkan dengan memutar L-2 sejauh 90^0 searah dengan arah putaran jarum jam dengan pusat titik O(0,0) ($R_{\_}$) menghasilkan bayangan berupa L-3. Dengan simbol, uraian tersebut dapat dinyatakan sebagai:

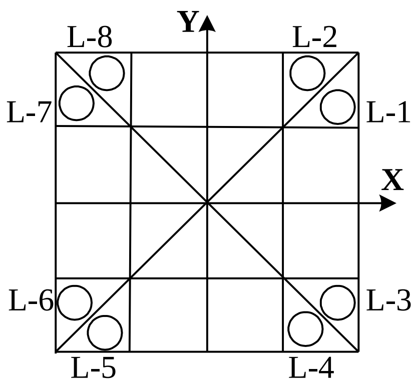
$(R_{\_} \circ P_3)(L\text{-}1) = R_{\_}(L\text{-}2) = L\text{-}3 = P_1(L\text{-}1)$.



Gambar a.4



Gambar a.5



Gambar a.6

3). Perhatikan Gambar a.4.

L-4 dapat diperoleh dari L-1 dengan beberapa cara antara lain :

(1) L-1 diputar dengan pusat O(0,0) sejauh 90^0 searah dengan arah putaran jarum jam atau dengan simbol : $R_{\_}$ (L-1);

(2) L-1 dicerminkan terhadap sumbu X, menghasilkan L-3 dan selanjutnya L-3 dicerminkan terhadap garis y = -x, atau dengan simbol:
$(P_4 \text{ o } P_1)$(L-1) = P_4(L-3);

(3) L-1 dicerminkan terhadap garis y = x, menghasilkan L-2 dan selanjutnya L-2 diputar dengan pusat O(0,0) sejauh 90^0 searah dengan arah putaran jarum jam, menghasilkan L-3, kemudian L-3 dicerminkan terhadap garis y = -x, atau dengan simbol : $(P_4 \text{ o } R_{\_} \text{ o } P_1)$(L-1) = $(P_4 \text{ o } R_{\_})$(L-2) = P_4 (L-3);

4). Perhatikan Gambar a.5.

a. L-5 dapat diperoleh dari L-1 dengan beberapa cara, antara lain :

(1). L-1 dicerminkan terhadap sumbu X, menghasilkan L-3 dan selanjutnya L-3 dicerminkan terhadap garis y = -x, menghasilkan L-4, kemudian L-4 dicerminkan terhadap sumbu Y, atau dengan simbol :
$(P_2 \text{ o } P_4 \text{ o } P_1)$ (L-1) = (P_2 o P4)(L-3) = P_2 (L-4);

(2). L-1 diputar dengan pusat O (0,0) sejauh 90^0 searah dengan arah putaran jarum jam, menghasilkan L-4, kemudian L-4 dicerminkan terhadap sumbu Y, atau dengan simbol : $(P_2 \text{ o } R_{\_})$ (L-1) = P_2 (L-4);

(3). L-1 dicerminkan terhadap garis y = x, menghasilkan L-2, kemudian L-2 diputar dengan pusat O(0,0) sejauh 180^0, menghasilkan L-5, atau dengan simbol : $(R^2 \text{ o } P_3)$ (L-1) = R^2 (L-2).

b. L-6 dapat diperoleh dari L-1 dengan beberapa cara, antara lain :

(1) L-1 dicerminkan terhadap sumbu X, menghasilkan L-3 dan selanjutnya L-3 dicerminkan terhadap sumbu Y, atau dengan simbol :
$(P_2 \text{ o } P_1)$ (L-1) = P_2 (L-3);

(2) L-1 diputar dengan pusat O(0,0) sejauh 180^0 menghasilkan L-6, atau dengan simbol : $R_{\_}$ (L-1);

(3) L-1 diputar dengan pusat O (0,0) sejauh 90^0 searah dengan arah putaran jarum jam, menghasilkan L-4, kemudian L-4 diputar dengan pusat O (0,0)

sejauh 90^0 searah dengan arah putaran jarum jam atau dengan simbol :
$(R_- \text{ o } R_-)$ (L-1);

(4) L-1 dicerminkan terhadap garis y = x, menghasilkan L-2 dan selanjutnya L-2 dicerminkan terhadap garis y = -x atau dengan simbol :
$(P_4 \text{ o } P_3)$ (L-1) = P_4 (L-2).

5). Perhatikan Gambar a.6.

a. L-7 dapat diperoleh dari L-1 dengan beberapa cara, antara lain :

(1) L-1 dicerminkan terhadap sumbu Y, atau dalam bentuk simbol P_2 (L-1);

(2) L-1 dicerminkan terhadap garis y = x, menghasilkan L-2 kemudian dilanjutkan, L-2 diputar dengan pusat O(0,0) sejauh 90^0 berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam, atau dengan simbol :
$(R_+ \text{ o } P_3)$ (L-1) = R_+ (L-2);

(3) L-1 dicerminkan terhadap sumbu X, menghasilkan L-3, kemudian diteruskan, L-3 diputar dengan pusat O (0,0) sejauh 180^0, atau dengan simbol: $(R^2 \text{ o } P_1)$ (L-1) = R^2 (L-3);

(4) L-1 dicerminkan terhadap garis y = -x, menghasilkan L-5 kemudian diteruskan, L-5 diputar dengan pusat O(0,0) sejauh 90^0 searah dengan arah putaran jarum jam, atau dengan simbol : $(R_- \text{ o } P_4)$ (L-1) = R_- (L-5).

b. L-8 dapat diperoleh dari L-1 dengan beberapa cara, antara lain :

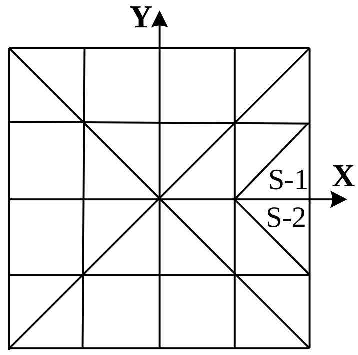
(1) L-1 diputar dengan pusat O(0,0) sejauh 90^0 berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam, atau dengan simbol : R_+ (L-1);

(2) L-1 dicerminkan terhadap garis y = x, menghasilkan L-2, kemudian diteruskan, L-2 dicerminkan terhadap sumbu Y, atau dengan simbol :
$(P_2 \text{ o } P_3)$ (L-1) = P_2 (L-2);

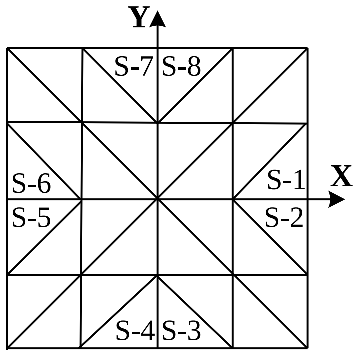
(3) L-1 diputar dengan pusat O(0,0) sejauh 180^0, menghasilkan L-6, kemudian diteruskan, L-6 diputar dengan pusat O(0,0) sejauh 90^0 searah dengan arah putaran jarum jam, atau dengan simbol : $(R_- \text{ o } R^2)$(L-1) = R_- (L-6);

(4) L-1 dicerminkan terhadap garis y = -x, menghasilkan L-5 kemudian diteruskan, L-5 dicerminkan terhadap sumbu X, atau dengan simbol :
$(P_1 \text{ o } P_4)$ (L-1) = P_1 (L-5).

b. Segitiga



Gambar b.1



Gambar b.2

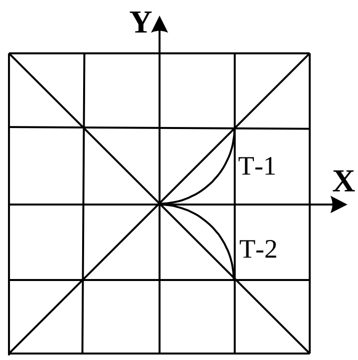
1). Perhatikan Gambar b.1.

Segitiga siku-siku 1 (S-1) dicerminkan terhadap sumbu X, menghasilkan S-2, atau dengan simbol : P_1 (S-1) = S-2.

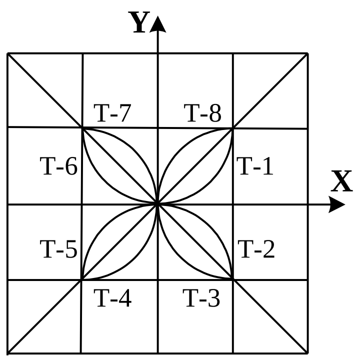
2). Perhatikan Gambar b.2.

Analog seperti contoh langkah-langkah yang dikembangkan pada bangun lingkaran, sebagaimana ditampilkan pada Gambar a.1 sampai dengan Gambar b.6, lengkap dengan uraian cara-cara untuk mendapatkan bayangannya, maka terhadap segitiga siku-siku 1 (S-1) dapat dilakukan transformasi (komposisi pencerminan, dan rotasi), sehingga diperoleh pola seperti terlihat pada Gambar b.2 yang bersesuaian dengan pola lingkaran seperti yang ditampilkan pada Gambar a.6.

c. Tembereng Lingkaran



Gambar c.1



Gambar c.2

1). Perhatikan Gambar c.1.

Tembereng lingkaran 1 (T-2) dicerminkan terhadap sumbu X, menghasilkan tembereng lingkaran 2 (T-2), atau dengan simbol : P_1 (T-1) = T-2.

2). Perhatikan Gambar c.2.

Analog seperti contoh langkah-langkah yang dikembangkan pada bangun lingkaran sebagaimana ditampilkan pada Gambar a.1 sampai dengan Gambar a.6, lengkap dengan uraian cara-cara untuk mendapatkan bayangannya, maka terhadap tembereng lingkaran 1 (T-1) dapat dilakukan transformasi (komposisi pencerminan dan rotasi), sehingga diperoleh pola seperti terlihat pada Gambar c.2 yang bersesuaian dengan pola lingkaran seperti yang ditampilkan pada Gambar a.6.

C. Telaah Transformasi (Komposisi Pencerminan dan Rotasi) Bangun Geometri Datar Terhadap Grup.

Untuk memudahkan pembahasan secara aljabar tentang komposisi transformasi (refleksi dan rotasi) sebagaimana dijelaskan pada bagian pendahuluan, maka 8 (delapan) unsur yang menjadi elemen komposisi transformasi, yakni : I, P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , R_+ , R_- , dan R^2, berturut-turut diwakili oleh matriks ordo 2 x 2, yang selengkapnya dapat diuraikan sebagai berikut:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ R_+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ R_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ \text{dan } R^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan matriks-matriks yang mewakili masing-masing transformasi tersebut, komposisi transformasi dapat dilakukan secara aljabar dengan cara melakukan perkalian matriks-matriks yang bersesuaian. Untuk lebih jelasnya dapat ditampilkan beberapa contoh sebagai berikut:

a. L-1 dicerminkan terhadap garis y = x, menghasilkan bayangan L-2, kemudian diteruskan dengan memutar L-2 sejauh 90^0 searah dengan arah putaran jarum jam dengan pusat di titik O(0,0) menghasilkan bayangan berupa L-3. Uraian tersebut secara simbol dapat dinyatakan: $(R_- \circ P_3)$(L-1) = R_- (L-2) = L-3 = P_1(L-1).

Apabila dijabarkan dengan menggunakan matriks-matriks yang mewakilinya, maka simbol tersebut dapat diinterpretasikan menjadi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = (L\text{-}3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \ \forall\ i \in (L\text{-}1)$$

dan $\forall\ t \in$ (L-3).

Ternyata (R_ o P_3)(L-1) = P_1(L-1), yaitu: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b. L-1 dicerminkan terhadap sumbu X menghasilkan L-3, kemudian diteruskan L-3 dicerminkan terhadap garis y = -x, menghasilkan L-4, kemudian diteruskan, L-4 dicerminkan terhadap sumbu Y menghasilkan L-5, atau dengan simbol :

(P_2 o P_4 o P_1)(L-1) = (P_2 o P_4)(L-3) = P_2 (L-4) = L-5.

Komposisi transformasi tersebut sama dengan L-1 dicerminkan terhadap garis y = -x, atau dengan simbol P_4(L-1). Apabila dijabarkan dengan menggunakan matriks-matriks yang mewakilinya, maka simbol tersebut dapat diinterpretasikan menjadi:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix},$$

$\forall i \in$ (L-1) dan $\forall t \in$ (L-3).

Ternyata (P_2 o P_4 o P_1)(L-1) = P_4(L-1), yaitu:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c. L-1 dicerminkan terhadap sumbu X menghasilkan L-3, kemudian diteruskan, L-3 dicerminkan terhadap sumbu Y menghasilkan L-6, atau dinyatakan dalam bentuk notasi: (P_2 o P_1)(L-1) = P_2(L-3). Dapat pula L-1 diputar dengan pusat O(0,0) sejauh 180^0, menghasilkan L-6, atau dinyatakan dalam bentuk simbol : R^2 (L-1).

Apabila dijabarkan dengan menggunakan matriks-matriks yang mewakilinya, maka simbol tersebut dapat diinterpretasikan menjadi:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix},$$ $\forall i \in$ (L-1) dan $\forall t \in$ (L-3).

Ternyata (P_2 o P_1)(L-1) = R^2 (L-1), yaitu: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Analog tiga contoh di atas, dapat ditampilkan tabel Cayley komposisi transformasi yang melibatkan 8 (delapan) unsur yang telah dipaparkan di atas, sebagai berikut:

Tabel 1

o	I	P_1	P_2	P_3	P_4	R_+	R_-	R^2
I	I	P_1	P_2	P_3	P_4	R_+	R_-	R^2
P_1	P_1	I	R^2	R_-	R_+	P_4	P_3	P_2
P_2	P_2	R^2	I	R_+	R_-	P_3	P_4	P_1
P_3	P_3	R_+	R_-	I	R^2	P_1	P_2	P_4
P_4	P_4	R_-	R_+	R^2	I	P_2	P_1	P_3
R_+	R_+	P_3	P_4	P_2	P_1	R^2	I	R_-
R_-	R_-	P_4	P_3	P_1	P_2	I	R^2	R_+
R^2	R^2	P_2	P_1	P_4	P_3	R_-	R_+	I

Misalkan G adalah himpunan yang beranggotakan unsur-unsur komposisi transformasi sebagaimana yang telah diuraikan di atas, maka:

$G = \{ I, P_1 , P_2 , P_3 , P_4, R_+, R_- , R^2\}$.

Berdasarkan Tabel 1 tersebut di atas, dapat ditunjukkan bahwa:

G dengan operasi komposisi transformasi, memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

a). Tertutup,

b). Assosiatif.

c). Ada elemen Identitas, yaitu $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d). Setiap elemen G mempunyai invers, yakni:

I inversnya I,

P_1 inversnya P_1

P_2 inversnya P_2

P_3 inversnya P_3

P_4 inversnya P_4

R_+ inversnya R_-

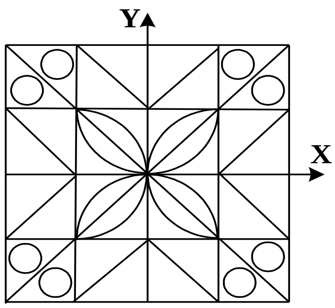
R_- inversnya R_+, dan

R^2 inversnya R^2.

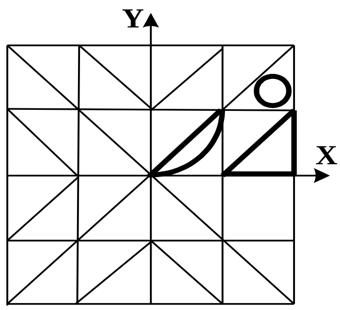
Karena keempat sifat grup dipenuhi oleh G dengan operasi komposisi transformasi, maka G adalah Grup.

D. Aplikasi Transformasi Bangun Geometri Datar yang Berhubungan dengan Grup

Pola sebagaimana yang tampak pada Gambar a.6, b.2, dan c.2, apabila dipadukan menjadi satu, jadilah suatu pola kombinasi seperti tampak pada tampilan Gambar d.1 berikut ini.



Gambar d.1



Gambar d.2

Dalam kehidupan sehari-hari, tidak begitu sukar untuk mendapatkan pola-pola seperti dicontohkan pada tampilan Gambar d.1. Pola-pola seperti dicontohkan di atas dapat dijumpai, misalkan: lantai keramik, ukiran Jepara, kain batik, hiasan dinding, dan lain-lain. Perlu diketahui bahwa bangun-bangun geometri datar yang dijadikan bangun dasar untuk ditransformasikan tidak hanya lingkaran, segitiga, ataupun tembereng lingkaran saja. Banyak bangun-bangun geometri yang dapat dipilih dan dikombinasikan, sehingga menghasilkan pola-pola yang indah dan menarik.

E. Penutup

Dari uraian pada pembahasan, kita dapat memperoleh pola-pola yang kita inginkan melalui komposisi transformasi pada bangun geometri datar. Adapun untuk menggambar pola pada kain batik, kita cukup melukis sebuah lingkaran, sebuah segitiga, dan sebuah tembereng lingkaran seperti tampak pada Gambar d.2 dengan menggunakan program komputer. Proses pencerminan dan rotasi Gambar d.2 untuk mendapatkan Gambar d.1 tentunya dapat dirancang dengan program komputer yang bisa dikerjakan oleh programmer.

Daftar Pustaka

Pandoyo & Joko Moesono, dkk. 1994, *Matematika 3 untuk SLTP*, Jakarta, Balai Pustaka.

Gallian Joseph A, 1990, *Contemporary Abstract Algebra*, Loxington, Massachusetts, Toronto, D.C. Heath and Company.

Gilbert William J, 1976, Modern Algebra With Applications, New York, John Wiley and Sons.

Herstein, 1975, Topics in Algebra, New York, John Wiley and Sons.