Imajiner: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
ISSN (Online): 2685-3892
Vol. 7, No. 4, Juli 2025, Hal. 244-255
Available Online at journal.upgris.ac.id/index.php/imajiner

Pelabelan $L(2,1)$pada Graf Koprima Prima dari Grup Bilangan Bulat Modulo

Siti Muawanah[1], Isnaini Rosyida[2], Muhamad Adzib Baihaqi[3], Abdurahim[4]
[1,2,3]Universitas Negeri Semarang
[4]Universitas Mataram
[1]awan.sitimuawanah@mail.unnes.ac.id

ABSTRAK

Graf dapat digunakan untuk merepresentasikan struktur dan hubungan antara elemen-elemen dalam sebuah grup. Graf koprima prima dari grup bilangan bulat modulo merupakan graf yang himpunan simpulnya berupa himpunan elemen grup dan dua simpul berbeda dikatakan bertetangga jika faktor persekutuan terbesar (FPB) dari order kedua simpul tersebut sama dengan 1 atau bilangan prima. Implementasi graf yang pernah digunakan dalam pengaturan frekuensi radio adalah pelabelan $L(2,1)$. Penelitian ini akan menkaji tentang pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima-prima dari grup bilangan bulat modulo yang beroder perpangkatan prima, yaitu $\mathbb{Z}_{(p^n)}$ dengan p bilangan prima. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka dan analisis pola yang terbentuk dari beberapa kasus nilai p. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima-prima dari grup $\mathbb{Z}_{(p^n)}$ memiiliki nilai minimal label terbesar $2p-2$ untuk $n=1$ dan $p^n + \mathrm{p} - 1$ untuk $n \geq 2$.

Kata Kunci: pelabelan; graf koprima prima; grup bilangan bulat modulo.

ABSTRACT

Graphs is used to represent the structure and relationships between elements within a group. The coprime prime graph of integer group modulo is a graph whose vertex set consists of elements of group, and two any distinct vertices are adjacent if and only if the greatest common divisor (gcd) of the orders of the two vertices is either 1 or a prime number. One of graph implementation that has been used in radio frequency assignment is the $L(2,1)$-labeling. This research discusses the $L(2,1)$-labeling on the coprime-prime graph of integer group modulo with order of prime power, $\mathbb{Z}_{(p^n)}$ where p is a prime number. The method used in this research is literature review and analysis of patterns formed from several cases for values of p. The results obtained of this study are the $L(2,1)$-labeling of the coprime-prime graph $\mathbb{Z}_{(p^n)}$ has minimum value of the largest label $2p-2$ for $n=1$ and $p^n + p - 1$ for $n \geq 2$

Keywords: labeling; prime coprime graph; integer group modulo

PENDAHULUAN

Grup merupakan suatu himpunan yang tertutup terhadap operasi biner yang bersifat asosiatif, memiliki elemen identitas untuk operasi tersebut, dan setiap elemennya memiliki elemen invers dalam himpunan tersebut (Davvaz, 2021). Meskipun bersifat abstrak, struktur grup ini dapat ditemukan dalam beberapa himpunan, seperti himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan, himpunan semua bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_n$ dengan operasi penjumlahan modulo n, dan himpunan semua matriks berordo $m \times n$ dengan entri bilangan Real dengan operasi penjumlahan matriks.

Misalkan grup G diasumsikan sebagai himpunan simpul dan suatu kondisi dua simpul saling bertetangga (terhubung langsung oleh sisi) didefinisikan, maka akan diperoleh sebuah graf. Graf $H = (V, E)$ terdiri dari V, suatu himpunan simpul, dan E, suatu himpunan sisi yang menghubungkan simpul-simpul di V (Rosen, 2019). Graf yang diperoleh dari suatu grup merupakan representasi dari grup tersebut. Penelitian tentang berbagai representasi graf dari grup telah dilakukan. Graf prima dari suatu grup berhingga telah dikenalkan oleh Williams (1981). Selanjutnya, Ma et al. (2014) memperkenalkan karakteristik dan bentuk graf koprima dari berbagai grup berhingga. Mansoori et al. (2016) menkaji dual dari graf koprima, yaitu graf non-koprima. Adhikari & Banerjee (2022) memperkenalkan graf koprima-prima dari grup berhingga. Lingkup penelitian graf-graf tersebut terus berkembang. Devandra & Chandini Anjali (2022) telah mendeskripsikan graf prima, graf koprima, graf non-koprima, graf pangkat, dan graf irisan dari berbagai grup. Graf pangkat dari grup bilangan bulat modulo berorder bilangan prima diteliti oleh Syechah et al. (2022). Beberapa penelitian mengenai indeks topologi dari graf koprima dan graf koprima-prima dideskripsikan oleh Husni et al. (2022), Syarifudin et al. (2023), Gayatri et al., 2023), dan Abdurahim et al. (2024, 2025). Implementasi graf di berbagai konteks mendukung perkembangan penelitian tentang teori graf.

Salah satu penerapan graf adalah pelabelan. Pelabelan merupakan suatu fungsi yang memasangkan setiap simpul dari graf H ke elemen himpunan $\{0,1,2,3,\dots,k\}$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ dengan suatu sifat/teknik tertentu. Pelabelan $L(2,1)$ merupakan teknik pelabelan berdasarkan jarak antar simpul. Selisih label dari dua simpul bertetangga minimal 2 dan selisih label dari dua simpul berjarak dua minimal 1 (Kamila & Jauhari, 2024). Pelabelan $L(2,1)$ digunakan untuk penentuan frekuensi radio yang kesediaannya terbatas dan transmitter yang berdekatan tidak bisa menggunakan frekuensi yang sama. Penelitian tentang pelabelan $L(2,1)$ berkembang mengikuti jenis graf yang berkembang seperti graf roda, graf kipas, dan graf teratai oleh Fatimah et al. (2016), graf sparkle oleh Husnul Yaqin (2019), graf buku segitiga, graf kerucut, graf tadpole, graf dumbbell, dan graf hasil identifikasi titik oleh Hafif Komarullah (2020). Kamila & Jauhari, (2024) menunjukkan bahwa bilangan asli minimal yang digunakan dalam pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_{(2p^2)}}$ dengan p bilangan prima adalah $\alpha_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{(2p^2)}}\right) = 2p^2$.

Graf koprima dan graf koprima prima dari suatu grup yang sama memiliki himpunan simpul yang sama, tetapi memiliki himpunan sisi yang berbeda. Dua simpul berbeda dari graf koprima bertetangga jika FPB dari order kedua simpul adalah 1 (Dorbidi, 2016). Sementara itu, dua simpul berbeda dari graf koprima prima bertetangga jika FPB dari order kedua simpul adalah 1 atau bilangan prima (Adhikari & Banerjee, 2022). Akibatnya graf koprima merupakan subgraf dari graf koprima prima. Bertambahnya sisi pada dua simpul dari graf koprima menjadi graf koprima prima akan mengakibatkan adanya perbedaan antara pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima dan graf koprima prima. Artikel ini akan membahas pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima prima, khususnya graf koprima prima dari grup bilangan bulat modulo p^n dengan p bilangan prima, serta nilai minimal dari label terbesar pada pelabelan ini.

Beberapa definisi dan teorema yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

Definisi 1

Dua simpul u dan v pada graf G dikatakan bertetangga di G jika u dan v merupakan titik ujung dari sisi/garis e di himpunan sisi pada graf G (Rosen, 2019). Jadi u dan v bertetangga jika ada sisi $e = (u, v) \in E(G)$.

Definisi 2
Jarak dua simpul u dan v pada graf G adalah panjang lintasan minimal yang menghubungkan kedua simpul dan dinotasikan sebagai $d(u,v)$ (Hafif Komarullah, 2020).

Definisi 3
Misalkan G grup dengan elemen identitas e dan $x \in G$, order elemen x adalah bilangan asli terkecil k sedemikian hingga $x^k = e$ dan dinotasikan $|x| = k$ (Husni et al., 2022).

Teorema 1
Misalkan G grup siklik berorder n. Graf koprima prima $\Theta(G)$ merupakan graf lengkap jika dan hanya jika n merupakan bilangan prima (Adhikari & Banerjee, 2022).
Bukti : telah dibuktikan oleh Adhikari & Banerjee (2022).

Teorema 3
Nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf lengkap $\mathrm{K_n}$ adalah $\alpha_{2,1}(\mathrm{K_n}) = 2n - 2$ (Husnul Yaqin, 2019).
Bukti: telah dibuktikan oleh Husnul Yaqin (2019).

Berikut contoh graf koprima prima untuk $\mathbb{Z}_n$ grup bilangan bulat modulo n dan pelabelan $L(2,1)$ pada graf tersebut.

Contoh 1
Misalkan diberikan grup $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Order dari masing-masing elemen adalah $|\bar{0}| = 1$, $|\bar{1}| = 6$, $|\bar{2}| = 3$, $|\bar{3}| = 2$, $|\bar{4}| = 3$, dan $|\bar{5}| = 6$. Selanjutnya dapat ditentukan nilai FPB dari order dari setiap pasangan elemen seperti pada Tabel 1.

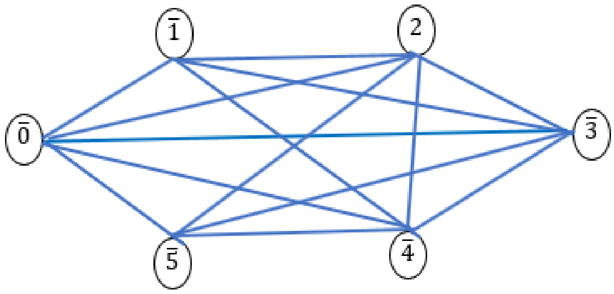
Tabel 1. FPB Order Dua Elemen

Order	$\lvert\bar{0}\rvert$	$\lvert\bar{1}\rvert$	$\lvert\bar{2}\rvert$	$\lvert\bar{3}\rvert$	$\lvert\bar{4}\rvert$	$\lvert\bar{5}\rvert$
$\lvert\bar{0}\rvert$	-	$(\lvert\bar{0}\rvert, \lvert\bar{1}\rvert) = 1$	$(\lvert\bar{0}\rvert, \lvert\bar{2}\rvert) = 1$	$(\lvert\bar{0}\rvert, \lvert\bar{3}\rvert) = 1$	$(\lvert\bar{0}\rvert, \lvert\bar{4}\rvert) = 1$	$(\lvert\bar{0}\rvert, \lvert\bar{5}\rvert) = 1$
$\lvert\bar{1}\rvert$	$(\lvert\bar{1}\rvert, \lvert\bar{0}\rvert) = 1$	-	$(\lvert\bar{1}\rvert, \lvert\bar{2}\rvert) = 3$	$(\lvert\bar{1}\rvert, \lvert\bar{3}\rvert) = 2$	$(\lvert\bar{1}\rvert, \lvert\bar{4}\rvert) = 3$	$(\lvert\bar{1}\rvert, \lvert\bar{5}\rvert) = 6$
$\lvert\bar{2}\rvert$	$(\lvert\bar{2}\rvert, \lvert\bar{0}\rvert) = 1$	$(\lvert\bar{2}\rvert, \lvert\bar{1}\rvert) = 3$	-	$(\lvert\bar{2}\rvert, \lvert\bar{3}\rvert) = 1$	$(\lvert\bar{2}\rvert, \lvert\bar{4}\rvert) = 3$	$(\lvert\bar{2}\rvert, \lvert\bar{5}\rvert) = 3$
$\lvert\bar{3}\rvert$	$(\lvert\bar{3}\rvert, \lvert\bar{0}\rvert) = 1$	$(\lvert\bar{3}\rvert, \lvert\bar{1}\rvert) = 2$	$(\lvert\bar{3}\rvert, \lvert\bar{2}\rvert) = 1$	-	$(\lvert\bar{3}\rvert, \lvert\bar{4}\rvert) = 1$	$(\lvert\bar{3}\rvert, \lvert\bar{5}\rvert) = 2$
$\lvert\bar{4}\rvert$	$(\lvert\bar{4}\rvert, \lvert\bar{0}\rvert) = 1$	$(\lvert\bar{4}\rvert, \lvert\bar{1}\rvert) = 3$	$(\lvert\bar{4}\rvert, \lvert\bar{2}\rvert) = 3$	$(\lvert\bar{4}\rvert, \lvert\bar{3}\rvert) = 1$	-	$(\lvert\bar{4}\rvert, \lvert\bar{5}\rvert) = 3$
$\lvert\bar{5}\rvert$	$(\lvert\bar{5}\rvert, \lvert\bar{0}\rvert) = 1$	$(\lvert\bar{5}\rvert, \lvert\bar{1}\rvert) = 6$	$(\lvert\bar{5}\rvert, \lvert\bar{2}\rvert) = 3$	$(\lvert\bar{5}\rvert, \lvert\bar{3}\rvert) = 2$	$(\lvert\bar{5}\rvert, \lvert\bar{4}\rvert) = 3$	-

Dua simpul bertentangga pada graf koprima prima jika FPB dari order kedua simpul adalah 1 atau prima, sehingga diperoleh graf $\Theta(\mathbb{Z}_6)$ dengan tabel daftar ketetanggan pada Tabel 2 dan graf $\Theta(\mathbb{Z}_6)$ dapat disajikan seperti Gambar 1.

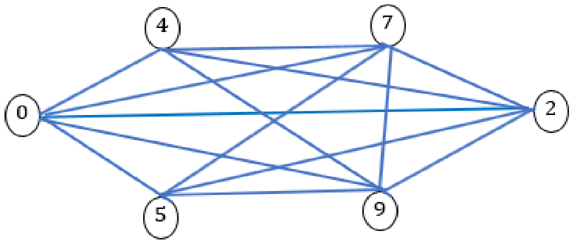
Tabel 2. Daftar Ketetanggaan Elemen Graf

Simpul	Simpul yang Bertetangga
$\bar{0}$	$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}$
$\bar{4}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$



Gambar 1. Graf Koprima prima $\Theta(\mathbb{Z}_6)$

Graf koprima prima $\Theta(\mathbb{Z}_6)$ yang dilabeli dengan pelabelan $L(2,1)$ mempunyai nilai minimal label terbesarnya adalah $\alpha_{2,1}(\Theta(\mathbb{Z}_6)\,) = 9$. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $\Theta(\mathbb{Z}_6)$ ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Koprima prima $\Theta(\mathbb{Z}_6)$

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan adalah penelitian dasar. Metode ini digunakan untuk mengembangkan teori sehingga dapat diperoleh teori baru dari materi yang diteliti. Penelitian ini lebih fokus untuk mengetahui, menjelaskan, dan memprediksi sifat/karakteritik dari teori yang diteliti yaitu pelabelan $L(2,1)$ graf koprima prima dari grup bilangan bulat modulo p^n dengan p bilangan prima serta nilai minimal dari label terbesar pada pelabelan ini.

Penelitian diawali dengan menelaah atau teori, kemudian permasalahan dikelompokan dalam beberapa kasus. Dalam suatu kasus, dipilih beberapa contoh teori untuk menentukan pola dan menyusun dugaan yang sesuai pola. Terakhir, dugaan dibuktikan dengan pembuktian deduktif. Penelitian ini termasuk penelitian deskriptif. Data atau teori yang dibutuhkan dapat diperoleh melalui buku dan jurnal serta sumber pustaka yang lainnya. Teknik analisis yang digunakan adalah analisis isi sehingga teori dapat dikembangkan dengan baik.

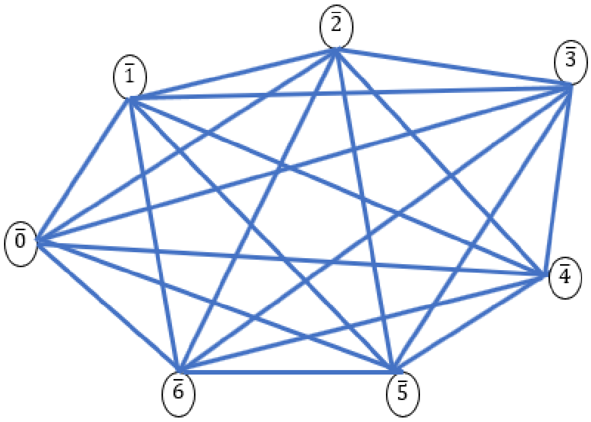
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Koprima Prima $\Theta(\mathbb{Z}_p)$ dengan p bilangan prima

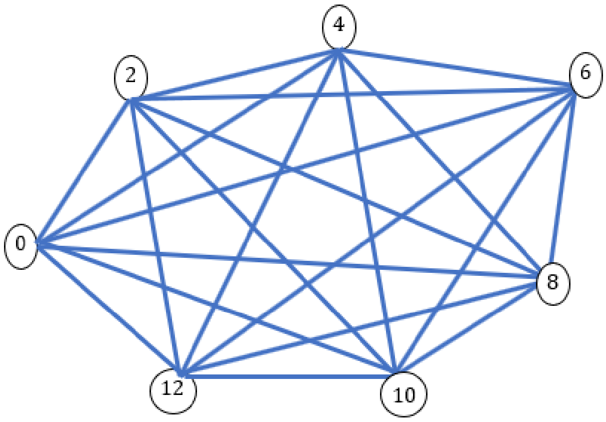
Berikut contoh graf koprima prima untuk $\mathbb{Z}_p$ grup bilangan bulat modulo p dengan p bilangan prima serta pelabelan $L(2,1)$ pada graf tersebut.

Contoh 2

Misalkan diberikan grup $\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}\}$. Order dari masing-masing elemen adalah $|\bar{0}| = 1$, $|\bar{1}| = |\bar{2}| = |\bar{3}| = |\bar{4}| = |\bar{5}| = |\bar{6}| = 7$ sehingga FPB dari order dua elemennya adalah 1 atau 7. Akibatnya setiap dua simpul berbeda akan bertetangga di graf koprima prima $\Theta(\mathbb{Z}_7)$. Graf $\Theta(\mathbb{Z}_7)$ dan pelabelan $L(2,1)$ dengan $\alpha_{2,1}(\Theta(\mathbb{Z}_7)\,) = 12$ masing-masing ditunjukkan Gambar 3 dan Gambar 4.



Gambar 3. Graf Koprima prima $\Theta(\mathbb{Z}_7)$



Gambar 4. Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Koprima prima $\Theta(\mathbb{Z}_7)$

Grup bilangan bulat modulo p dengan p prima, yaitu $\mathbb{Z}_p$, merupakan grup siklik yang berorder p. Setiap elemen di $\mathbb{Z}_p$ beroder 1 atau bilangan prima p. Akibatnya FPB dari order sebarang dua elemen adalah 1 atau bilangan prima. Setiap dua simpul graf koprima prima untuk $\Theta(\mathbb{Z}_p)$ akan bertetangga sehingga diperoleh graf lengkap. Berikut teorema tentang nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf ini.

Teorema 4.
Nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima prima $\Theta(\mathbb{Z}_p)$ dengan p prima adalah $\alpha_{2,1}(\Theta(\mathbb{Z}_p)) = 2p - 2$.

Bukti:
Grup $\mathbb{Z}_p$ dengan p bilangan prima merupakan grup siklik. Berdasarkan Teorema 2, graf $\Theta(\mathbb{Z}_p)$ merupakan graf lengkap. Selanjutnya berdasarkan Teorema 3, nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf $\Theta(\mathbb{Z}_p)$ adalah $\alpha_{2,1}(\Theta(\mathbb{Z}_p)) = 2p - 2$.

Selanjutnya akan disajikan pelabelan $L(2,1)$ pada beberapa graf koprima prima untuk grup bilangan bulat modulo dengan order perpangkatan bilangan prima meliputi $\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})$, $\Theta(\mathbb{Z}_{(3^n)})$, dan $\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})$ untuk suatu bilangan prima dan $n \geq 2$.

Graf Koprima Prima $\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})$, dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})$ memiliki grup $\mathbb{Z}_{(2^n)} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{2^n - 1}\}$ sebagai himpunan simpulnya. Order elemen-elemen $\mathbb{Z}_{(2^n)}$ yaitu $|\bar{0}| = 1$, $|\overline{2^{n-1}}| = 2$, dan order elemen yang lainnya adalah 2^m untuk suatu $m \in \mathbb{N}$ dengan $m \geq 2$. Himpunan simpul dipartisi menjadi 3 yaitu

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \{\bar{0}\} \\
V_2 &= \{\overline{2^{n-1}}\} \\
V_3 &= \mathbb{Z}_{(2^n)} \backslash \{\bar{0}, \overline{2^{n-1}}\}.
\end{aligned}
$$

1) Jelas $|\bar{0}| = 1$. Misalkan $\bar{v} \in V_2 \cup V_3$ sebarang, maka FPB dari $|\bar{0}|$ dan $|\bar{v}|$ adalah $(|\bar{0}|, |\bar{v}|) = 1$. Akibatnya terdapat sisi $(\bar{0}, \bar{v})$ di himpunan sisi graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})$. Jadi $(\bar{0}, \bar{v}) \in E\left(\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})\right)$ untuk setiap $\bar{v} \in \mathbb{Z}_{(2^n)} \backslash \{\bar{0}\}$.
2) Jelas $|\overline{2^{n-1}}| = 2$. Misalkan $\bar{v} \in V_3$ sebarang. Jelas $|\bar{v}| = 2^m$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$ dengan $m > 1$ sehingga FPB dari $|\overline{2^{n-1}}|$ dan $|\bar{v}|$ adalah $(|\overline{2^{n-1}}|, |\bar{v}|) = 2$ berupa bilangan prima. Akibatnya terdapat sisi $(\overline{2^{n-1}}, \bar{v})$ di himpunan sisi graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})$. Jadi $(\overline{2^{n-1}}, \bar{v}) \in E\left(\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})\right)$ untuk setiap $\bar{v} \in V_3$
3) Misalkan $\bar{u}, \bar{v} \in V_3$ berbeda sebarang. Jelas $|\bar{u}| = 2^{m_1}$ dan $|\bar{v}| = 2^{m_2}$ untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ dengan $m_1 \geq 2$ dan $m_2 \geq 2$. Dapat diperoleh FPB dari $|\bar{u}|$ dan $|\bar{v}|$ adalah $(|\bar{u}|, |\bar{v}|) \geq 4$. Akibatnya tidak terdapat sisi $(\bar{u}, \bar{v})$ di himpunan sisi graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})$. Jadi $(\bar{u}, \bar{v}) \notin E\left(\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})\right)$ untuk setiap $\bar{u}, \bar{v} \in V_3$ dan $\bar{u} \neq \bar{v}$.

Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Koprima Prima $\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})$, dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Teorema 5

Diberikan graf koprima prima $\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})$ dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})$ adalah $\alpha_{2,1}(\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})\ ) = 2^n + 1$.

Bukti:

Diberikan graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})$ dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Fungsi $f(\bar{x}): \Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)}) \ \rightarrow \{0,1,2,3,4, \dots\}$ yang didefinisikan sebagai

$$
f(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & , \text{jika } \bar{x} = \bar{0} \\ x + 3 & , \text{jika } \bar{0} < \bar{x} < \overline{2^{n-1}} \\ 2 & , \text{jika } \bar{x} = \overline{2^{n-1}} \\ x + 2 & , \text{jika } \overline{2^{n-1}} < \bar{x} < \overline{2^n - 1} \end{cases}
$$

merupakan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})$.

1) Kasus 1: $(\bar{0}, \bar{v}) \in E\left(\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})\right)$ untuk setiap $\bar{v} \in \mathbb{Z}_{(2^n)} \backslash \{\bar{0}\}$.
   Jelas $f(\bar{0}) = 0$ dan $f(\bar{v}) \geq 2$ sehingga $|f(\bar{0}) - f(\bar{v})| \geq 2$.
2) Kasus 2: $(\overline{2^{n-1}}, \bar{v}) \in E\left(\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})\right)$ untuk setiap $\bar{v} \in \mathbb{Z}_{(2^n)} \backslash \{\bar{0}, \overline{2^{n-1}}\}$
   Jelas $f(\overline{2^{n-1}}) = 2$ dan $f(\bar{v}) \geq 4$ sehingga $|f(\overline{2^{n-1}}) - f(\bar{v})| \geq 2$.
3) Kasus 4: $(\bar{u}, \bar{v}) \notin \boldsymbol{E}\left(\Theta(\mathbb{Z}_{(2^n)})\right)$ untuk setiap $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{Z}_{(2^n)} \backslash \{\bar{0}, \overline{2^{n-1}}\}$ dan $\bar{u} \neq \bar{v}$.

Jelas $(\bar{0},\bar{u})$ dan $(\bar{0},\bar{v})$ di $E\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(2^n)}\right)\right)$ maka $d(\bar{u},\bar{v}) = 2$.

a) Jika $\bar{u} < \overline{2^{n-1}}$ dan $\bar{v} < \overline{2^{n-1}}$, maka $f(\bar{u}) = u + 3$ dan $f(\bar{v}) = v + 3$. Karena $\bar{u} \neq \bar{v}$, maka $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| \geq 1$.
b) Jika $\bar{u} < \overline{2^{n-1}}$ dan $\bar{v} > \overline{2^{n-1}}$, maka $v \geq u + 2$, $f(\bar{u}) = u + 3$ dan $f(\bar{v}) = v + 2$. Dapat diperoleh
$$|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| = |(u + 3) - (v + 2)| \geq |(u + 3) - (u + 4)| = 1.$$
c) Jika $\bar{u} > \overline{2^{n-1}}$ dan $\bar{v} > \overline{2^{n-1}}$, maka $f(\bar{u}) = u + 2$ dan $f(\bar{v}) = v + 2$. Karena $\bar{u} \neq \bar{v}$, maka $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| \geq 1$.

Dapat disimpulkan untuk setiap simpul $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ dengan $(\bar{u},\bar{v}) \in E\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(2^n)}\right)\right)$ berlaku $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| \geq 2$ dan untuk setiap simpul $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ dengan $d(\bar{u},\bar{v}) = 2$ berlaku $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| \geq 1$.
Jadi $f(\bar{x})$ merupakan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(2^n)}\right)$ dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Perhatikan bahwa nilai label terbesar adalah $x + 2$ dengan $x_{maks} = 2^n - 1$ sehingga $\alpha_{2,1}\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(2^n)}\right)\right) = x + 2 = 2^n - 1 + 2 = 2^n + 1$.

Graf Koprima Prima $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)$, dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Graf $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)$ memiliki grup $\mathbb{Z}_{(3^n)} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\ldots,\overline{3^n - 1}\}$ sebagai himpunan simpulnya.Order elemen-elemen $\mathbb{Z}_{(3^n)}$ yaitu $|\bar{0}| = 1$, $\left|\overline{3^{n-1}}\right| = \left|\overline{2(3^{n-1})}\right| = 3$, dan order elemen yang lainnya adalah 3^m untuk suatu $m \in \mathbb{N}$ dengan $m \geq 2$. Himpunan simpul dipartisi menjadi 3 yaitu

$$V_1 = \{\bar{0}\}$$
$$V_2 = \{\overline{3^{n-1}},\overline{2(3^{n-1})}\}$$
$$V_3 = \mathbb{Z}_{(3^n)}\backslash\{\bar{0},\overline{3^{n-1}},\overline{2(3^{n-1})}\}$$

1) Jelas $|\bar{0}| = 1$. Misalkan $\bar{v} \in V_2 \cup V_3$ sebarang, maka FPB dari $|\bar{0}|$ dan $|\bar{v}|$ adalah $(|\bar{0}|,|\bar{v}|) = 1$. Akibatnya terdapat sisi $(\bar{0},\bar{v})$ di himpunan sisi graf $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)$. Jadi $(\bar{0},\bar{v}) \in E\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)\right)$ untuk setiap $\bar{v} \in \mathbb{Z}_{(3^n)}\backslash\{\bar{0}\}$.
2) Misalkan $\bar{u} \in V_2$ sebarang. Jelas $|\bar{u}| = 3$. Misalkan $\bar{v} \in V_2 \cup V_3$ sebarang dan $\bar{u} \neq \bar{v}$. Jelas $|\bar{v}| = 3^m$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$ dengan $m \geq 1$ sehingga FPB dari $|\bar{u}|$ dan $|\bar{v}|$ adalah $(|\bar{u}|,|\bar{v}|) = 3$ berupa bilangan prima. Akibatnya terdapat sisi $(\bar{u},\bar{v})$ di himpunan sisi graf $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(2^n)}\right)$. Jadi $(\bar{u},\bar{v}) \in E\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)\right)$ untuk setiap $\bar{u},\bar{v} \in \mathbb{Z}_{(3^n)}\backslash\{\bar{0}\}$ dengan $\bar{u} \neq \bar{v}$.
3) Misalkan $\bar{u},\bar{v} \in V_3$ berbeda sebarang. Jelas$|\bar{u}| = 3^{m_1}$ dan $|\bar{v}| = 3^{m_2}$ untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ dengan $m_1 \geq 2$ dan $m_2 \geq 2$. Dapat diperoleh FPB dari $|\bar{u}|$ dan $|\bar{v}|$ adalah $(|\bar{u}|,|\bar{v}|) \geq 9$. Akibatnya tidak terdapat sisi $(\bar{u},\bar{v})$ di himpunan sisi graf $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)$. Jadi $(\bar{u},\bar{v}) \notin E\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)\right)$ untuk setiap $\bar{u},\bar{v} \in V_3$ dan $u \neq v$.

Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Koprima Prima $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)$, dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Teorema 6

Diberikan graf $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)$ dengan $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)$ adalah $\alpha_{2,1}\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)\right) = 3^n + 2$.

Bukti:
Diberikan graf $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)$ dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Fungsi $f(\bar{x})$: $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right) \rightarrow \{0,1,2,3,4,\ldots\}$ yang didefinisikan sebagai

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{, jika } \bar{x} = \bar{0} \\ x+5 & \text{, jika } \bar{0} < \bar{x} < \overline{3^{n-1}} \\ 2 & \text{, jika } \bar{x} = \overline{3^{n-1}} \\ x+4 & \text{, jika } \overline{3^{n-1}} < \bar{x} < \overline{2(3^{n-1})} \\ 4 & \text{, jika } \bar{x} = \overline{2(3^{n-1})} \\ x+3 & \text{, jika } \overline{2(3^{n-1})} < \bar{x} < \overline{3^n - 1} \end{cases}$$

merupakan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)$.

Bukti:

1) Kasus 1: $(\bar{0}, \bar{v}) \in E\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)\right)$ untuk setiap $\bar{v} \in \mathbb{Z}_{(3^n)} \backslash \{\bar{0}\}$.
Jelas $f(\bar{0}) = 0$ dan $f(\bar{v}) \geq 2$ sehingga $|f(\bar{0}) - f(\bar{v})| \geq 2$.
2) Kasus 2: $(\overline{3^{n-1}}, \bar{v}) \in E\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)\right)$ untuk setiap $\bar{v} \in \mathbb{Z}_{(3^n)} \backslash \{\bar{0}, \overline{3^{n-1}}\}$.
Jelas $f\left(\overline{3^{n-1}}\right) = 2$ dan $f(\bar{v}) \geq 4$ sehingga $\left|f\left(\overline{3^{n-1}}\right) - f(\bar{v})\right| \geq 2$.
3) Kasus 3: $\overline{2(3^{n-1})}, \bar{v}) \in E\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)\right)$ untuk setiap $\bar{v} \in \mathbb{Z}_{(3^n)} \backslash \{\bar{0}, \overline{3^{n-1}}, \overline{2(3^{n-1})}\}$.
Jelas $f\left(\overline{2(3^{n-1})}\right) = 4$ dan $f(\bar{v}) \geq 6$ sehingga $\left|f\left(\overline{2(3^{n-1})}\right) - f(\bar{v})\right| \geq 2$.
4) Kasus 4: $(\bar{u}, \bar{v}) \notin E\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)\right)$ untuk setiap $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{Z}_{(3^n)} \backslash \{\bar{0}, \overline{3^{n-1}}, \overline{2(3^{n-1})}\}$ dan $\bar{u} \neq \bar{v}$. Jelas $(\bar{0}, \bar{u})$ dan $(\bar{0}, \bar{v})$ di $E\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)\right)$ maka $d(\bar{u}, \bar{v}) = 2$.
   a) Jika $\bar{u} < \overline{3^{n-1}}$ dan $\bar{v} < \overline{3^{n-1}}$, maka $f(\bar{u}) = u + 5$ dan $f(\bar{v}) = v + 5$. Karena $u \neq v$, maka $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| \geq 1$.
   b) Jika $\bar{u} < \overline{3^{n-1}}$ dan $\overline{3^{n-1}} < \bar{v} < \overline{2(3^{n-1})}$, maka $v \geq u + 2$, $f(\bar{u}) = u + 5$ dan $f(v) = v + 4$. Dapat diperoleh
   $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| = |(u+5) - (v+4)| \geq |(u+5) - (u+6)| = 1$.
   c) Jika $\bar{u} < \overline{3^{n-1}}$ dan $\overline{2(3^{n-1})} < \bar{v} < \overline{3^n - 1}$, maka $v \geq u + 5$, $f(\bar{u}) = u + 5$ dan $f(\bar{v}) = v + 3$. Dapat diperoleh
   $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| = |(u+5) - (v+3)| \geq |(u+5) - (u+8)| = 3$.
   d) Jika $\overline{3^{n-1}} < \bar{u} < \overline{2(3^{n-1})}$ dan $\overline{3^{n-1}} < \bar{v} < \overline{2(3^{n-1})}$, maka $f(\bar{u}) = u + 4$ dan $f(\bar{v}) = v + 4$. Karena $u \neq v$, maka $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| \geq 1$.
   e) Jika $\overline{3^{n-1}} < \bar{u} < \overline{2(3^{n-1})}$ dan $\overline{2(3^{n-1})} < \bar{v} < \overline{3^n - 1}$, maka $v \geq u + 2$, $f(\bar{u}) = u + 4$ dan $f(\bar{v}) = v + 3$. Dapat diperoleh
   $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| = |(u+4) - (v+3)| \geq |(u+4) - (u+5)| = 1$.
   f) Jika $\overline{2(3^{n-1})} < \bar{u} < \overline{3^n - 1}$ dan $\overline{2(3^{n-1})} < \bar{v} < \overline{3^n - 1}$, maka $f(\bar{u}) = u + 3$ dan $f(\bar{v}) = v + 3$. Karena $u \neq v$, maka $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| \geq 1$.

Dapat disimpulkan untuk setiap simpul $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ dengan $(\bar{u}, \bar{v}) \in E\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)\right)$ berlaku $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| \geq 2$ dan untuk setiap simpul $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ dengan $d(\bar{u}, \bar{v}) = 2$ berlaku $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| \geq 1$.
Jadi $f(\bar{x})$ merupakan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)$ dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Perhatikan bahwa nilai label terbesar adalah $x + 3$ dengan $x_{maks} = 3^n - 1$ sehingga $\alpha_{2,1}\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(3^n)}\right)\right) = x + 3 = 3^n - 1 + 3 = 3^n + 2$.

Graf Koprima Prima $\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})$, dengan p bilangan prima dan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})$ memiliki himpunan simpul $\mathbb{Z}_{(p^n)} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{p^n - 1}\}$. Berdasarkan Teorema Lagrange, order elemen dari suatu grup membagi order grupnya sehingga order elemen $v \in \mathbb{Z}_{(p^n)}$ membagi order grupnya yaitu $|\mathbb{Z}_{(p^n)}| = p^n$. Akibatnya $|v| = p^m$ untuk suatu $m \in \mathbb{Z}$ dengan $m \geq 0$. Berdasarkan order elemennya, himpunan $\mathbb{Z}_{(p^n)}$ dapat dipartisi menjadi 3 yaitu:

1) $V_1 = \{\bar{0}\}$ dengan $|\bar{0}| = 1$
2) $V_2 = \{\overline{p^{n-1}}, \overline{2(p^{n-1})}, \overline{3(p^{n-1})}, \dots, \overline{(p-2)(p^{n-1})}, \overline{(p-1)(p^{n-1})}\}$ dengan $|\bar{v}| = p$ untuk setiap $\bar{v} \in V_2$
3) $V_3 = \mathbb{Z}_{(p^n)} \setminus (V_1 \cup V_2)$ dengan $|\bar{v}| = p^m$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$ dengan $m \geq 2$

Selanjutnya dapat ditentukan hubungan ketetanggan simpul dari graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})$ sebagai berikut.

1) Jelas $|\bar{0}| = 1$. Misalkan $\bar{v} \in V_2 \cup V_3$ sebarang, maka FPB dari $|\bar{0}|$ dan $|\bar{v}|$ adalah $(|\bar{0}|, |\bar{v}|) = 1$. Akibatnya terdapat sisi $(\bar{0}, \bar{v})$ di himpunan sisi graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})$. Jadi $(\bar{0}, \bar{v}) \in E\left(\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})\right)$ untuk setiap $\bar{v} \in \mathbb{Z}_{(p^n)} \setminus \{\bar{0}\}$.
2) Misalkan $\bar{u} \in V_2$ sembarang. Jelas $|\bar{u}| = p$. Misalkan $\bar{v} \in V_2 \cup V_3$ sebarang dan $\bar{u} \neq \bar{v}$. Jelas $|\bar{v}| = p^m$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$ dengan $m \geq 2$ sehingga FPB dari $|\bar{u}|$ dan $|\bar{v}|$ adalah $(|u|, |\bar{v}|) = p$ berupa bilangan prima. Akibatnya terdapat sisi $(\bar{u}, \bar{v})$ di himpunan sisi graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})$. Jadi $(\bar{u}, \bar{v}) \in E\left(\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})\right)$ untuk setiap $\bar{u} \in V_2$ dan $\bar{v} \in \mathbb{Z}_{(p^n)} \setminus \{\bar{0}\}$ dengan $\bar{u} \neq \bar{v}$.
3) Misalkan $\bar{u}, \bar{v} \in V_3$ berbeda sebarang. Jelas$|\bar{u}| = p^{m_1}$ dan $|\bar{v}| = p^{m_2}$ untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ dengan $m_1 \geq 2$ dan $m_2 \geq 2$. Dapat diperoleh FPB dari $|\bar{u}|$ dan $|\bar{v}|$ adalah $(|\bar{u}|, |\bar{v}|) \geq p^2$. Akibatnya tidak terdapat sisi $(\bar{u}, \bar{v})$ di himpunan sisi graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})$. Jadi $(\bar{u}, \bar{v}) \notin E\left(\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})\right)$ untuk setiap $\bar{u}, \bar{v} \in V_3$ dan $\bar{u} \neq \bar{v}$.

Graf koprima prima $\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})$ dengan p bilangan prima dan $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, memiliki p^n simpul. Diantaranya, terdapat p simpul yang bertetangga dengan semua simpul lainnya sehingga simpul tersebut berderajat $p^n - 1$. Sementara itu simpul lainnya sebanyak $p^n - p$ hanya bertetangga dengan p simpul. Akibatnya, jumlah derajat simpul pada graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})$ adalah

$$\sum_{v \in \Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})} d(v) = p(p^n - 1) + (p^n - p)p = p(2p^n - p - 1).$$

Berdasarkan Teorema Jabat Tangan, graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})$ memiliki sisi sebanyak $\frac{p}{2}(2p^n - p - 1)$. Jadi graf koprima prima $\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)}) = (V, E)$ dengan $|V| = p^n$ dan $|E| = \frac{p}{2}(2p^n - p - 1)$.

Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Koprima Prima $\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})$, dengan p bilangan prima dan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Teorema 7

Diberikan graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})$ dengan p bilangan prima dan $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})$ adalah $\alpha_{2,1}(\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})) = p^n + p - 1$.

Bukti:
Graf $\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})$ memiliki himpunan simpul $\mathbb{Z}_{(p^n)} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \overline{p^n - 2}, \overline{p^n - 1}\}$ yang dapat dipartisi menjadi 3 yaitu:

1) $V_1 = \{\overline{0}\}$ dengan $|\overline{0}| = 1$,
2) $V_2 = \{\overline{p^{n-1}}, \overline{2(p^{n-1})}, \overline{3(p^{n-1})}, \dots, \overline{(p-2)(p^{n-1})}, \overline{(p-1)(p^{n-1})}\}$
   $= \{\overline{q(p^{n-1})} | q = 1,2,3, \dots, p-1\}$
   dengan $|\overline{v}| = p$ untuk setiap $\overline{v} \in V_2$,
3) $V_3 = \mathbb{Z}_{(p^n)} \backslash (V_1 \cup V_2)$ dengan $|\overline{v}| = p^m$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$ dengan $m \geq 2$.

Jelas $|V_1| = 1$, $|V_2| = p - 1$, dan $|V_3| = p^n - p$.
Elemen-elemen di V_3 dapat diurutkan dari terkecil hingga terbesar sehingga
$V_3 = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \overline{p^{n-1} - 2}, \overline{p^{n-1} - 1}, \overline{p^{n-1} + 1}, \overline{p^{n-1} + 2}, \dots, \overline{2(p^{n-1}) - 2}, \overline{2(p^{n-1}) - 1}, \overline{2(p^{n-1}) + 1}, \overline{2(p^{n-1}) + 2}, \dots, \overline{3(p^{n-1}) - 2}, \overline{3(p^{n-1}) - 1}, \overline{3(p^{n-1}) + 1}, \overline{3(p^{n-1}) + 2}, \dots, \overline{p^n - 2}, \overline{p^n - 1}\}$.
Misalkan $s_1 = \overline{1}$, $s_2 = \overline{2}$, …, $s_{(p^n - p - 1)} = \overline{p^n - 2}$, $s_{(p^n - p)} = \overline{p^n - 1}$ secara terurut dari terkecil hingga terbesar, maka $V_3 = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_{(p^n - p)}\}$
Perhatikan bahwa

1) $(\overline{0}, \overline{v}) \in E\left(\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})\right)$ untuk setiap $\overline{v} \in \mathbb{Z}_{(p^n)} \backslash \{\overline{0}\}$,
2) $(\overline{u}, \overline{v}) \in E\left(\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})\right)$ untuk setiap $\overline{u} \in V_2$ dan $\overline{v} \in \mathbb{Z}_{(p^n)} \backslash \{\overline{0}\}$ dengan $\overline{u} \neq \overline{v}$.
3) $(\overline{u}, \overline{v}) \notin E\left(\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})\right)$ untuk setiap $\overline{u}, \overline{v} \in V_3$ dan $\overline{u} \neq \overline{v}$.

Selanjutkan dikontruksi fungsi $f(\overline{x}) : \Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)}) \rightarrow \{0,1,2,3,4, \dots\}$ dengan

1) $f(\overline{x}) : V_1 \rightarrow \{0\}$
2) $f(\overline{x}) : V_2 \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2(p-1)\}$ dengan $f(\overline{x}) = f\left(\overline{q(p^{n-1})}\right) = 2q$ untuk setiap $\overline{x} = \overline{q(p^{n-1})} \in V_2$,
3) $f(\overline{x}) : V_3 \rightarrow \{2p, 2p+1, 2p+2, \dots\}$ dengan $f(\overline{x}) = f(s_i) = 2p + i - 1$ untuk setiap $\overline{x} = s_i \in V_3$.

Akan ditunjukkan bahwa $f(\overline{x})$ merupakan pelabelan $L(2,1)$.

1) Kasus 1: $(\overline{0}, \overline{v}) \in E\left(\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})\right)$ untuk setiap $\overline{v} \in \mathbb{Z}_{(p^n)} \backslash \{\overline{0}\}$.
   Jelas $f(\overline{0}) = 0$ dan $f(\overline{v}) \geq 2q \geq 2.1 = 2$ sehingga $|f(\overline{0}) - f(\overline{v})| \geq 2$.
2) Kasus 2: $(\overline{u}, \overline{v}) \in E\left(\Theta(\mathbb{Z}_{(p^n)})\right)$ untuk setiap $\overline{u} \in V_2$ dan $\overline{v} \in \mathbb{Z}_{(p^n)} \backslash \{\overline{0}\}$ dengan $\overline{u} \neq \overline{v}$. Misalkan $\overline{u} = \overline{q_1(p^{n-1})}$ untuk suatu $q_1 \in \{0,1,2,3,4, \dots, p-1\}$, maka
   $$f(\overline{u}) = f\left(\overline{q_1(p^{n-1})}\right) = 2q_1.$$
   a. Misalkan $\overline{v} = \overline{q_2(p^{n-1})} \in V_2$ untuk suatu $q_2 \in \{0,1,2,3,4, \dots, p-1\}$ maka $f(\overline{v}) = f\left(\overline{q_2(p^{n-1})}\right) = 2q_2$. Karena $\overline{u} \neq \overline{v}$, maka $q_1 \neq q_2$ sehinggga $|q_1 - q_2| \geq 1$. Akibatnya
   $$|f(\overline{u}) - f(\overline{v})| = |2q_1 - 2q_2| = 2|q_1 - q_2| \geq 2.1 = 2.$$
   b. Misalkan $\overline{v} \in V_3$ maka $\overline{v} = s_i$ untuk suatu $i \in \{1,2,3,4, \dots, p^n - p\}$ maka $f(\overline{v}) = f(s_i) = 2p + i - 1$ sehingga
   $$|f(\overline{u}) - f(\overline{v})| = |2q_1 - (2p + i - 1)| = |2(p - q_1) + i - 1|$$
   Perhatikan $q_1 \leq p - 1 \Leftrightarrow p - q_1 \geq 1$ dan $i \geq 1$ sehingga
   $$|f(\overline{u}) - f(\overline{v})| = |2(p - q_1) - 1 + i| \geq |2.1 - 1 + 1| \geq 2.$$

3) Kasus 3: $(\bar{u},\bar{v}) \notin E\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(p^n)}\right)\right)$ untuk setiap $\bar{u},\bar{v} \in V_3$ dan $\bar{u} \neq \bar{v}$. Dapat dimisalkan $\bar{u} = s_i$ dan $\bar{u} = s_j$ untuk suatu $i,j \in \{1,2,3,4,\dots,p^n - p\}$ dan $i \neq j$ sehingga $|i-j| \geq 1$. Perhatikan bahwa $f(\bar{u}) = f(s_i) = 2p + i - 1$ dan $f(\bar{v}) = f(s_j) = 2p + j - 1$ sehingga
$$|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| = |(2p + i - 1) - (2p + j - 1)| = |i - j| \geq 1.$$

Dapat disimpulkan untuk setiap simpul $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ dengan $(\bar{u},\bar{v}) \in E\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(p^n)}\right)\right)$ berlaku $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| \geq 2$ dan untuk setiap simpul $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ dengan $d(\bar{u},\bar{v}) = 2$ berlaku $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| \geq 1$.
Jadi $f(\bar{x})$ merupakan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(p^n)}\right)$ dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Perhatikan bahwa nilai label terbesar adalah $2p + i - 1$ dengan $i_{maks} = p^n - p$ sehingga $\alpha_{2,1}\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(p^n)}\right)\right) = 2p + i - 1 = 2p + p^n - p - 1 = p^n + p - 1$.

PENUTUP

Berdasarkan hasil dan pembahasan terkait pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima prima dari grup bilangan bulat modulo, diperoleh beberapa simpulan sebagai berikut.

1) Graf koprima prima $\Theta\left(\mathbb{Z}_p\right)$ dengan p bilangan prima merupakan graf lengkap. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $\Theta\left(\mathbb{Z}_p\right)$ memiliki nilai minimal label terbesar adalah $\alpha_{2,1}\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_p\right)\right) = 2n - 2$.
2) Graf koprima prima $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(p^n)}\right)$ dengan p bilangan prima dan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ memiliki simpul sebanyak p^n dan sisi sebanyak $\frac{p}{2}(2p^n - p - 1)$. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $\Theta\left(\mathbb{Z}_{(p^n)}\right)$ ini adalah $\alpha_{2,1}\left(\Theta\left(\mathbb{Z}_{(p^n)}\right)\right) = p^n + p - 1$.

Hasil kajian pelabelan jarak pada graf hasil representasi grup bilangan bulat modulo berorder perpangkatan bilangan prima membuka potensi pengembangan lebih lanjut dalam konteks pelabelan graf berbasis jarak pada graf koprima prima dari struktur grup yang lainnya dan dalam implementasi pelabelan jarak pada alokasi kanal komunikasi.

REFERENSI

Abdurahim, A., Pratiwi, L. F., Karang, G. Y., Wardhana, I. G. A. W., Irwansyah, I., Awanis, Z. Y., & Romdhini, M. U. (2024). Indeks Topologi Padmakar Ivan dan Szeged pada Graf Koprima Prima dari Grup Bilangan Bulat Modulo. *Square : Journal of Mathematics and Mathematics Education*, *6*(2), 139–149. https://doi.org/10.21580/square.2024.6.2.22836

Abdurahim, Jihadil Qudsi, Siti Muawanah, & Salwa. (2025). Indeks Harmonik, Randic, dan Gutman dari Graf Koprima Prima untuk Grup Bilangan Bulat Modulo. *Jurnal Diferensial*, *7*, 38–46.

Adhikari, A., & Banerjee, S. (2022). Prime coprime graph of a finite group. *Novi Sad Journal of Mathematics*, *52*(2), 41–59. https://doi.org/10.30755/NSJOM.11151

Davvaz, B. (2021). A First Course in Group Theory. In *A First Course in Group Theory*. Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-16-6365-9

Devandra, U., & Chandini Anjali, L. (2022). Mendeskripsikan Grup Menggunakan Berbagai Graf. *Jurnal UJMC*, *8*, 27–34.

Dorbidi, H. R. (2016). A Note on The Coprime Graph of a Group. In *International Journal of Group Theory ISSN* (Vol. 5, Issue 4). www.ui.ac.ir

Fatimah, S., Sudarsana, I. W., & Musdalifah, dan S. (2016). PelabelanL(2,1) pada Operasi Beberapa Kelas Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika Dan Terapan*, *13*(2), 73–84.

Gayatri, M. R., Fadhilah, R., Lestari, S. T., Pratiwi, L. F., Abdurahim, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2023). Indeks Topologi dari Graf Koprima untuk Grup Dihedral dengan Orde Pangkat Prima. *Jurnal Diferensial*, *5*(2), 126–134. https://doi.org/10.35508/jd.v5i2.12462

Hafif Komarullah. (2020). *Pelabelan L(2,1) pada Graf Buku Segitiga, Graf Kerucut, Graf Tadpole dan Graf Dumbbell serta Graf Hasil Identifikasi Titik dari Graf Buku Segitiga dan Graf Lintasan*. Universitas Jember.

Husni, M. N., Syafitri, H., Siboro, A. M., Syarifudin, A. G., Aini, Q., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). The Harmonic Index and The Gutman Index of Coprime Graph of Integer Group Modula with Order of Prime Power. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, *16*(3), 961–966. https://doi.org/10.30598/barekengvol16iss3pp961-966

Husnul Yaqin. (2019). *Pelabelan Titik dan Sisi (2,1) pada Graf Sparkle*. Universitas Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Kamila, S. N., & Jauhari, M. N. (2024). Rumus Umum Pelabelan L(2, 1) pada Graf Koprima Grup Bilangan Bulat Modulo m. *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika*, *3*(6), 274–280. https://doi.org/10.18860/jrmm.v3i6.28426

Ma, X., Wei, H., & Yang, L. (2014). The Coprime Graph of a Group. In *International Journal of Group Theory ISSN* (Vol. 3, Issue 3). www.ui.ac.ir

Mansoori, F., Erfanian, A., & Tolue, B. (2016). Non-coprime graph of a finite group. *AIP Conference Proceedings*, *1750*. https://doi.org/10.1063/1.4954605

Rosen, K. H. . (2019). *Discrete mathematics and its applications*. McGraw-Hill.

Syarifudin, A. G., Santi, L. M., Faradiyah, A. R., Wijaya, V. R., & Suwastika, E. (2023). Topological Indices of the Relative Coprime Graph of the Dihedral Group. *JTAM (Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika)*, *7*(3), 698. https://doi.org/10.31764/jtam.v7i3.14913

Syechah, B. N., Evi Yuniartika Asmarani, Abdul Gazir Syarifudin, Dara Puspita Anggraeni, & Gede Adhitya Wisnu Wardhana. (2022). Representasi Graf Pangkat Pada Grup Bilangan Bulat Modulo Berorde Bilangan Prima. *Evolusi: Journal of Mathematics and Sciences*, *6*(2).

Williams, J. S. (1981). Prime Graph Components of Finite. In *JOURNXL OF ALGEBRA* (Vol. 69).