

Indeks Hyper Wiener pada Graf Nilpoten dari Gelanggang Bilangan Bulat Modulo

Ni Putu Feby Prasetya Dewi¹, Putu Kartika Dewi², Raphita Yanisari Silalahi³

^{1,2,3}Universitas Pendidikan Ganesha

¹feby.prasetya@student.undiksha.ac.id

ABSTRAK

Graf merupakan struktur matematika yang digunakan untuk merepresentasikan hubungan antar objek. Salah satu jenis graf yang berkaitan dengan struktur aljabar adalah graf nilpoten. Untuk suatu gelanggang R , graf nilpoten adalah graf dengan himpunan simpul berupa seluruh unsur di R dan dua simpul berbeda x dan y bertetangga jika dan hanya jika hasil perkalian x dan y merupakan unsur nilpoten di R . Indeks Hyper-Wiener merupakan salah satu indeks topologi yang mengukur jarak dan kuadrat jarak antar pasangan simpul dalam graf.

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus umum Indeks Hyper-Wiener pada graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo, khususnya pada dua kasus, yaitu bilangan bulat modulo p pangkat k dan bilangan bulat modulo hasil kali p dan q , dengan p dan q merupakan bilangan prima serta k merupakan bilangan asli. Metode yang digunakan bersifat deduktif, dimulai dengan pengkajian struktur graf nilpoten dari bilangan bulat modulo n , klasifikasi pasangan simpul, serta perhitungan jarak antar simpul. Hasil yang diperoleh berupa rumus tertutup Indeks Hyper-Wiener untuk masing-masing kasus.

Kata Kunci: Indeks hyper-wiener; graf nilpoten; gelanggang bilangan bulat modulo.

ABSTRACT

A graph is a mathematical structure used to represent relationships between objects. One type of graph related to algebraic structures is the nilpoten graph. For a ring R , a nilpoten graph is a graph with a vertex set consisting of all elements in R and two distinct vertices x and y adjacent if and only if the product of x and y is a nilpoten element in R . The Hyper-Wiener Index is a topological index that measures the distance and the square of the distance between pairs of vertices in a graph.

This study aims to determine the general formula for the Hyper-Wiener Index for nilpoten graphs of the ring of integers modulo, specifically in two cases: integers modulo p to the power k and integers modulo the product of p and q , where p and q are prime numbers and k is a natural number. The method used is deductive, starting with an examination of the structure of the nilpoten graph of integers modulo n , the classification of vertex pairs, and the calculation of the distance between vertices. The results obtained are closed formulas for the Hyper-Wiener Index for each case.

Keywords: Hyper-wiener index; nilpoten graph; integer modulo ring.

PENDAHULUAN

Graf dalam teori matematika adalah bentuk penggambaran atau representasi visual dari relasi antar objek pada suatu himpunan. Menurut Suparta dkk., (2023) sebuah graf $G(V, E)$ adalah sistem yang terdiri dari himpunan tidak kosong berhingga dari himpunan simpul $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Berbagai konstruksi graf telah dilakukan berdasarkan struktur matematika tertentu. Dalam konteks aljabar, graf dapat digunakan untuk merepresentasikan struktur suatu gelanggang melalui hubungan antar elemennya. Salah satu graf yang dibahas dalam ranah ini adalah graf nilpoten. Graf nilpoten yang diperkenalkan oleh (Nikmehr & Khojasteh, 2013) terkait dengan graf nilpoten atas gelanggang R didefinisikan sebagai graf dengan unsur-unsur di R merupakan simpul graf, dan dua buah

simpul dikatakan bertetangga jika dan hanya jika perkalian dua simpul merupakan unsur nilpoten. Berbeda dengan Nikmehr & Khojasteh, Tahya dan Persulesy memperkenalkan definisi graf nilpoten dari gelanggang R yang dinotasikan $G(R)$, dua simpul berbeda dikatakan bertetangga jika dan hanya jika penjumlahan dua simpul merupakan unsur nilpoten (Tahya & Persulesy, 2020).

Pendekatan penggunaan parameter numerik untuk mengkaji struktur graf telah banyak digunakan dalam teori graf, baik melalui pelabelan seperti penelitian oleh (Suparta et al., 2024) dan pewarnaan graf oleh (Suparta et al., 2025) maupun melalui indeks topologi berbasis jarak. Beberapa peneliti telah membahas mengenai indeks topologi pada graf. *Topological indices* atau indeks topologi merupakan parameter numerik yang mengukur karakteristik graf berdasarkan struktur dan jarak antar simpulnya (Husni et al., 2023). Salah satu indeks yang memiliki peran penting dalam kajian graf kimia dan matematika adalah indeks Hyper-Wiener, yang dikembangkan sebagai perluasan dari indeks Wiener klasik. Indeks ini mempertimbangkan jarak antar pasangan simpul dan kuadrat jaraknya, sehingga mampu memberikan informasi yang lebih lengkap mengenai struktur graf. Studi mengenai indeks ini telah berkembang pesat, seperti yang ditunjukkan oleh Balamoorthy dkk., (2024) dalam pengembangan indeks Hyper-Wiener untuk berbagai operasi graf.

Kajian struktur graf yang dibangun dari himpunan elemen gelanggang \mathbb{Z}_n telah banyak dilakukan, baik berdasarkan operasi penjumlahan (unit graf) maupun perkalian (graf nilpoten). Lestari dkk., (2024) menunjukkan bahwa graf unit dari \mathbb{Z}_n membentuk graf bipartit dan multipartit lengkap. Penelitian sebelumnya oleh (Malik et al., 2023) juga telah mengkaji struktur dari graf nilpoten pada gelanggang \mathbb{Z}_n dengan $n = p^k$ di mana p adalah bilangan prima dan $k \in \mathbb{N}$, dan menunjukkan bahwa graf tersebut terdiri atas subgraf lengkap dari unsur-unsur nilpoten dan subgraf bintang dari unsur nilpoten dengan non-nilpoten. Penelitian oleh Ghoffari dkk., (2025) juga menganalisis indeks Hyper-Wiener namun pada graf non-koprima dari gelanggang \mathbb{Z}_n . Dalam penelitian ini, pendekatan serupa digunakan untuk mengkaji nilai indeks Hyper-Wiener dari graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo dalam bentuk rumus umum. Dengan pendekatan deduktif, rumus tersebut dirumuskan berdasarkan klasifikasi jenis pasangan simpul dan jarak antar simpulnya, serta disusun dalam bentuk tertutup yang bergantung pada parameter p, q , dan k .

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode deduktif dengan pendekatan teoritis dalam menentukan rumus umum indeks Hyper-Wiener pada graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo. Langkah pertama adalah mempelajari definisi dan teori tentang graf nilpoten, gelanggang bilangan bulat modulo, serta indeks topologi yang digunakan yaitu indeks Hyper-Wiener sebagai dasar analisis. Selanjutnya dilakukan analisis struktur graf nilpoten pada gelanggang \mathbb{Z}_n dengan dua kasus, yaitu \mathbb{Z}_{p^k} dan \mathbb{Z}_{pq} untuk mengidentifikasi hubungan antar simpul berdasarkan sifat nilpotennya. Kemudian jarak antar simpul ditentukan dengan menggunakan konsep jarak dalam teori graf guna perumusan nilai indeks Hyper-Wiener. Rumus umum yang diperoleh selanjutnya diverifikasi melalui contoh kasus untuk memastikan kesesuaian hasil perhitungan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Elemen nilpoten dari suatu gelanggang adalah unsur yang dikalikan dirinya sendiri secara berulang akan menghasilkan nol. Secara formal, unsur nilpoten didefinisikan sebagai berikut

Definisi 3.1 (Malik dkk., 2024) Suatu unsur a pada suatu ring dikatakan unsur nilpoten apabila untuk setiap bilangan bulat positif n didapatkan hasil $a^n = 0$.

Definisi 3.2 (Nikmehr & Khojasteh, 2013) Graf nilpoten dari gelanggang \mathbb{Z}_n , disimbolkan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$, adalah graf dengan himpunan simpul semua unsur digelanggang \mathbb{Z}_n . Dua titik berbeda x, y dikatakan bertetangga jika dan hanya jika $xy \in N(\mathbb{Z}_n)$, dengan $N(\mathbb{Z}_n)$ menyatakan himpunan semua elemen nilpoten dari R .

Untuk gelanggang \mathbb{Z}_n dengan $n = p^k$ perumuman himpunan unsur-unsur nilpoten disajikan pada teorema-teorema berikut.

Teorema 3.1 (Malik et al., 2023) Jika \mathbb{Z}_n adalah suatu gelanggang bilangan bulat modulo berorde $n = p^k$ dengan suatu $k \in \mathbb{N}$, maka himpunan unsur nilpoten dari \mathbb{Z}_n yang dinotasikan dengan $N(\mathbb{Z}_n) = \{0, p, 2p, 3p, \dots, p^k - p\}$.

Teorema 3.2 (Malik et al., 2023) Misalkan \mathbb{Z}_n suatu gelanggang bilangan bulat modulo berorde $n = p^k$ dengan $k \in \mathbb{N}$, maka $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ memiliki suatu subgraf lengkap $K_{p^{k-1}}$.

Teorema 3.3 (Malik et al., 2023) Misalkan \mathbb{Z}_n suatu gelanggang bilangan bulat modulo berorde $n = p^k$ dengan $k \in \mathbb{N}$, maka $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ memiliki $n - p^{k-1}$ subgraf bintang $K_{1,p^{k-1}}$.

Berdasarkan hasil penelitian (Malik et al., 2023) didapatkan dua buah subgraf yaitu subgraf lengkap yang terbentuk dari seluruh unsur nilpotennya dan subgraf bintang yang terbentuk dari unsur nilpoten dengan nilpoten.

Lemma 3.1. Misalkan \mathbb{Z}_n suatu gelanggang bilangan bulat berorde $n = p^k$ dan $N(\mathbb{Z}_n)$ merupakan himpunan seluruh unsur nilpoten pada \mathbb{Z}_n . Jarak dua buah simpul pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah sebagai berikut:

$$d(u, v) = \begin{cases} 1 & \{u, v\} \in N(\mathbb{Z}_n), u \neq v \\ 1 & u \in N(\mathbb{Z}_n), v \notin N(\mathbb{Z}_n) \\ 2 & \{u, v\} \notin N(\mathbb{Z}_n), u \neq v \end{cases}$$

Lemma 3.2 Banyak sisi subgraf lengkap $K_{p^{k-1}}$ dan subgraf bintang $K_{1,p^{k-1}}$ secara berurutan pada bentuk graf nilpoten untuk gelanggang \mathbb{Z}_n yaitu $\frac{p^{k-1}(p^{k-1}-1)}{2}$ dan $(n - p^{k-1})(p^{k-1})$.

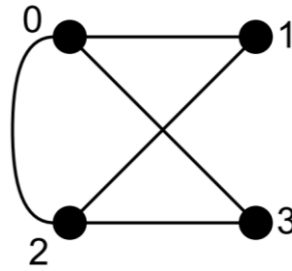
Setelah peneliti mengetahui karakteristik dari graf khususnya graf nilpoten pada gelanggang bilangan bulat berorde pangkat prima, selanjutnya peneliti mengkaji mengenai indeks Hyper Wiener pada gelanggang \mathbb{Z}_n dengan $n = p^k$. Berikut diberikan definisi Indeks Hyper Wiener.

Definisi 3.3 (Balamoorthy et al., 2024) Indeks Hyper Wiener dari graf G yang dinotasikan dengan $WW(G)$, didefinisikan sebagai berikut.

$$WW(G) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d(u, v) + d(u, v)^2 \right)$$

dengan $d(u, v)$ adalah jarak dari simpul u ke simpul v .

Sebelum mengkaji Indeks Hyper-Wiener pada \mathbb{Z}_{p^k} dengan suatu $k \in \mathbb{N}$, terlebih dahulu dikaji Indeks Hyper-Wiener pada \mathbb{Z}_{2^2} . Himpunan dari gelanggang \mathbb{Z}_4 adalah $\{0,1,2,3\}$, dan himpunan nilpoten $N(\mathbb{Z}_4) = \{0,2\}$. Karena perkalian unsur 0 dengan yang lain adalah 0, maka elemen 0 bertetangga dengan semua elemen \mathbb{Z}_4 . Demikian juga didapatkan $1 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 2$ sehingga didapatkan bentuk graf nilpoten dari \mathbb{Z}_4 adalah sebagai berikut.

Gambar 1. Graf Nilpoten \mathbb{Z}_4

$$\begin{aligned}
 \text{Indeks Hyper-Wiener dari } \Gamma(\mathbb{Z}_4) &= \left[\frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_4})} d(u,v) + d(u,v)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} [\{d(0,1) + d(0,1)^2\} + \{d(0,2) + d(0,2)^2\} + \{d(0,3) + d(0,3)^2\} \\
 &\quad + \{d(1,2) + d(1,2)^2\} + \{d(1,3) + d(1,3)^2\} + \{d(2,3) + d(2,3)^2\}] \\
 &= \frac{1}{2} [5(2) + 1(6)] \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, dilakukan pengkajian mengenai Indeks Hyper-Wiener dari \mathbb{Z}_{p^k} dengan p adalah bilangan prima dan $k \in \mathbb{N}$, sehingga didapatkan sebagai berikut.

Lemma 3.4 Misalkan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah graf nilpoten dari gelanggang \mathbb{Z}_n , dengan $n = p^k$. Maka banyak pasangan simpul yang berbeda diklasifikasikan sebagai berikut.

(1) Pasangan unsur nilpoten dengan unsur nilpoten

$$\frac{(p^{k-1})(p^{k-1} - 1)}{2}$$

(2) Pasangan unsur nilpoten dengan unsur non-nilpoten

$$(p^k - p^{k-1})(p^{k-1})$$

(3) Pasangan unsur non-nilpoten dengan unsur non-nilpoten

$$\frac{(p^k - p^{k-1})(p^k - p^{k-1} - 1)}{2}$$

Bukti.

Kasus 1. Jika $\{u, v\} \in N(\mathbb{Z}_n)$, dengan $u \neq v$.

Karena semua elemen nilpoten membentuk subgraf lengkap $K_{p^{k-1}}$ maka berlaku

$$d(u, v) = 1, \text{ dan } d(u, v)^2 = 1$$

Dengan jumlah pasangan berbeda dari n simpul nilpoten adalah kombinasi $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Sehingga, jumlah pasangan yang ada jika $\{u, v\} \in N(\mathbb{Z}_n)$, dengan $u \neq v$ adalah sebagai berikut.

$$\binom{p^{k-1}}{2} = \frac{(p^{k-1})(p^{k-1} - 1)}{2}$$

Kasus 2. Jika $u \in N(\mathbb{Z}_n)$ dan $v \notin N(\mathbb{Z}_n)$, dengan $u \neq v$.

Untuk setiap $u \in N(\mathbb{Z}_n)$ yang terhubung ke setiap $v \notin N(\mathbb{Z}_n)$, dengan $u \neq v$ membentuk subgraf bintang $K_{1,p^{k-1}}$, sehingga berlaku

$$d(u, v) = 1, \text{ dan } d(u, v)^2 = 1$$

Untuk setiap $u \in N(\mathbb{Z}_n)$ yang terhubung ke $v \notin N(\mathbb{Z}_n)$, semua unsur nilpoten terhubung ke setiap elemen non-nilpoten, sehingga

$$\text{Banyak pasangan} = (p^k - p^{k-1})(p^{k-1})$$

Kasus 3. Jika $\{u, v\} \notin N(\mathbb{Z}_n)$, dengan $u \neq v$.

Untuk setiap dua simpul non-nilpoten tidak terhubung langsung, namun keduanya terhubung ke simpul nilpoten yang sama, sehingga untuk $u, v \notin N(\mathbb{Z}_n)$, dengan $u \neq v$ berlaku

$$d(u, v) = 2, \text{ dan } d(u, v)^2 = 4$$

Dengan jumlah pasangan berbeda dari n simpul non-nilpoten adalah kombinasi 2 dari n
 $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Diketahui total elemen pada \mathbb{Z}_n dengan $n = p^k$ adalah sebanyak p^k , dan banyak unsur nilpoten adalah p^{k-1} , sehingga banyak unsur non-nilpoten adalah $p^k - p^{k-1}$.

Sehingga, jumlah pasangan yang ada jika $\{u, v\} \notin N(\mathbb{Z}_n)$, dengan $u \neq v$ adalah sebagai berikut.

$$\binom{p^k - p^{k-1}}{2} = \frac{(p^k - p^{k-1})(p^k - p^{k-1} - 1)}{2}$$

Teorema 3.4 Diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah graf nilpoten atas gelanggang \mathbb{Z}_n . Jika $n = p^k$ untuk suatu bilangan asli k maka $WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{1}{2} [(3p^2 - 4p + 2)p^{2k-2} - (3p - 2)p^{k-1}]$

Bukti.

Diperoleh bahwa indeks Hyper Wiener pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{p^k}}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_{p^k}}) &= \left[\frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (d(u, v) + d(u, v)^2) \right] \\ WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_{p^k}}) &= \frac{1}{2} \left[\left\{ \sum_{\{u,v\} \subseteq N(\mathbb{Z}_n)} (d(u, v) + d(u, v)^2) \right\} + \left\{ \sum_{\substack{u \in N(\mathbb{Z}_n) \\ v \notin N(\mathbb{Z}_n)}} (d(u, v) + d(u, v)^2) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \sum_{\{u,v\} \notin N(\mathbb{Z}_n)} (d(u, v) + d(u, v)^2) \right\} \right] \\ WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_{p^k}}) &= \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{p^{k-1}(p^{k-1} - 1)}{2} (1 + 1^2) \right\} + \{(p^k - p^{k-1})(p^{k-1})(1 + 1^2)\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{(p^k - p^{k-1})(p^k - p^{k-1} - 1)}{2} \right\} (2 + 2^2) \right] \end{aligned}$$

Dengan memisalkan

$$A = p^{k-1}$$

$$B = p^k = p \cdot p^{k-1} = p \cdot A$$

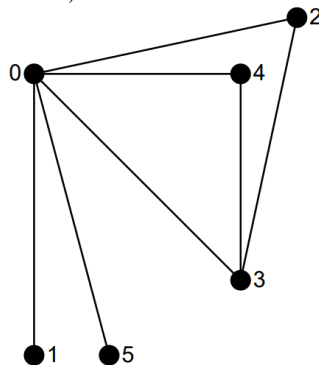
Didapat

$$\begin{aligned} WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_{p^k}}) &= \frac{1}{2} \left[\left\{ 2 \frac{A(A-1)}{2} \right\} + \{2((B-A)(A))\} + \left\{ 6 \frac{(B-A)(B-A-1)}{2} \right\} \right] \\ WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_{p^k}}) &= \frac{1}{2} [\{A(A-1)\} + \{2((p \cdot A - A)(A))\} + \{3(p \cdot A - A)(p \cdot A - A - 1)\}] \\ WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_{p^k}}) &= \frac{1}{2} [A^2(3p^2 - 4p + 2) - A(3p - 2)] \\ WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_{p^k}}) &= \frac{1}{2} [(3p^2 - 4p + 2)p^{2k-2} - (3p - 2)p^{k-1}] \end{aligned}$$

Hasil ini menunjukkan bahwa nilai indeks Hyper-Wiener pada graf nilpoten dari gelanggang \mathbb{Z}_{p^k} sangat dipengaruhi oleh struktur graf yang terbentuk dari unsur-unsur nilpoten. Berdasarkan definisi graf nilpoten oleh Nikmehr & Khojasteh, (2013) bahwa dua simpul dikatakan bertetangga jika hasil perkaliannya merupakan unsur nilpoten. Hal ini menyebabkan seluruh unsur nilpoten membentuk subgraf lengkap, sedangkan hubungan antara unsur nilpoten dan non-nilpoten membentuk subgraf bintang, sebagaimana ditunjukkan oleh Malik et al., (2023).

Struktur ini berimplikasi langsung terhadap jarak antar simpul dalam graf. Pada subgraf lengkap, jarak antar simpul bernilai 1, sehingga kontribusinya terhadap perhitungan nilai indeks Hyper-Wiener relatif kecil. Sebaliknya, untuk pasangan simpul non-nilpoten, lintasan terpendek harus melalui simpul nilpoten sehingga jaraknya menjadi 2. Sesuai dengan definisi indeks Hyper-Wiener oleh Balamoorthy et al., (2024) yang mempertimbangkan jarak dan kuadrat jarak, pasangan simpul dengan jarak lebih besar memberikan kontribusi yang lebih signifikan terhadap nilai indeks secara keseluruhan.

Untuk memperjelas pembahasan mengenai distribusi jarak antar simpul dalam graf nilpoten, selanjutnya dikaji kasus khusus pada gelanggang \mathbb{Z}_{pq} dengan p dan q bilangan prima. Sebelum mengkaji Indeks Hyper-Wiener pada \mathbb{Z}_{pq} dengan p, q adalah bilangan prima, terlebih dahulu dikaji Indeks Hyper-Wiener pada $\mathbb{Z}_{2 \cdot 3}$. Himpunan dari gelanggang $\mathbb{Z}_{2 \cdot 3}$ adalah $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, dan himpunan nilpoten $N(\mathbb{Z}_{2 \cdot 3}) = \{0\}$. Sehingga elemen 0 bertetangga dengan semua elemen \mathbb{Z}_6 . Kelipatan 2 yang bukan elemen dari himpunan nilpoten \mathbb{Z}_6 adalah 2 dan 4, atau $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_6) = \{2, 4\}$. Sedangkan kelipatan 3 yang bukan elemen dari himpunan nilpoten \mathbb{Z}_6 adalah 3, atau $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_6) = \{3\}$. Berdasarkan Definisi 3.2 didapat setiap elemen $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_6)$ bertetangga dengan setiap elemen $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_6)$. Komplemen dari kelipatan 2 gabungan kelipatan 3 yang bukan elemen dari himpunan nilpoten $N(\mathbb{Z}_6)$ adalah 1 dan 5. Graf nilpoten dari $\mathbb{Z}_{2 \cdot 3}$ ditunjukkan oleh Gambar 1.



Gambar 1. Graf Nilpoten dari $\mathbb{Z}_{2 \cdot 3}$

$$\begin{aligned}
 \text{Indeks Hyper-Wiener dari } \Gamma(\mathbb{Z}_{2:3}) &= \left[\frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2:3}})} d(u,v) + d(u,v)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} [\{d(0,1) + d(0,1)^2\} + \{d(0,2) + d(0,2)^2\} + \{d(0,3) + d(0,3)^2\} \\
 &\quad + \{d(0,4) + d(0,4)^2\} + \{d(0,5) + d(0,5)^2\} + \{d(1,2) + d(1,2)^2\} \\
 &\quad + \{d(1,3) + d(1,3)^2\} + \{d(1,4) + d(1,4)^2\} + \{d(1,5) + d(1,5)^2\} \\
 &\quad + \{d(2,3) + d(2,3)^2\} + \{d(2,4) + d(2,4)^2\} + \{d(2,5) + d(2,5)^2\} \\
 &\quad + \{d(3,4) + d(3,4)^2\} + \{d(3,5) + d(3,5)^2\} + \{d(4,5) + d(4,5)^2\}] \\
 &= \frac{1}{2} [7(2) + 8(6)] \\
 &= 31
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, dilakukan pengkajian mengenai Indeks Hyper-Wiener dari \mathbb{Z}_{pq} dengan p, q adalah bilangan prima, sehingga didapatkan sebagai berikut.

Teorema 3.5 Diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah graf nilpoten atas gelanggang \mathbb{Z}_n . Jika $n = pq$ dengan p, q adalah bilangan prima, maka

$$WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_{pq}}) = \frac{3}{2}p^2q^2 - \frac{11}{2}pq + 2p + 2q$$

Bukti.

Misalkan \mathbb{Z}_n suatu gelanggang bilangan bulat berorde $n = pq$ dengan p, q adalah bilangan prima. Banyak elemen pada \mathbb{Z}_{pq} adalah sebagai berikut.

$$\mathbb{Z}_{pq} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, pq - 1\}, \text{ sehingga, } |\mathbb{Z}_{pq}| = pq$$

Elemen-elemen pada \mathbb{Z}_{pq} dipartisi menjadi 4, yaitu sebagai berikut.

- (1) $N(\mathbb{Z}_{pq}) = \{0\}$, sehingga $|N(\mathbb{Z}_{pq})| = 1$
- (2) $\langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq}) = \{p, 2p, 3p, \dots, (q-1)p\}$, sehingga $|\langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})| = q - 1$
- (3) $\langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq}) = \{q, 2q, 3q, \dots, (p-1)q\}$, sehingga $|\langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})| = p - 1$
- (4) $|(\langle p \rangle \langle q \rangle)^c| = |\mathbb{Z}_{pq}| - |N(\mathbb{Z}_{pq})| - |\langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})| - |\langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})|$
 $= pq - 1 - (q - 1) - (p - 1)$
 $= pq - q - p + 1$

Untuk menghitung indeks Hyper-Wiener dari \mathbb{Z}_{pq} , banyak pasangan simpul yang berbeda diklasifikasikan sebagai berikut.

	$N(\mathbb{Z}_{pq})$	$\langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$	$\langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$	$(\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c$
$N(\mathbb{Z}_{pq})$		Kasus 1	Kasus 2	Kasus 3
$\langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$			Kasus 5	Kasus 6
$\langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$				Kasus 8
$(\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c$				

Kasus 1.

Jika $u \in N(\mathbb{Z}_{pq})$ dan $v \in \langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$, maka $d(u, v) = 1$

$$\begin{aligned}
 \text{Banyak pasangan } (u, v) &= |N(\mathbb{Z}_{pq})| \cdot |\langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})| \\
 &= 1 \cdot (q - 1) \\
 &= q - 1
 \end{aligned}$$

Kasus 2.

Jika $u \in N(\mathbb{Z}_{pq})$ dan $v \in \langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$, maka $d(u, v) = 1$

$$\begin{aligned}
 \text{Banyak pasangan } (u, v) &= |N(\mathbb{Z}_{pq})| \cdot |\langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})| \\
 &= 1 \cdot (p - 1) \\
 &= p - 1
 \end{aligned}$$

Kasus 3.

Jika $u \in N(\mathbb{Z}_{pq})$ dan $v \in ((p) \cup (q))^c$, maka $d(u, v) = 1$

$$\begin{aligned} \text{Banyak pasangan } (u, v) &= |N(\mathbb{Z}_{pq})| \cdot |((p) \cup (q))^c| \\ &= 1 \cdot (pq - q - p + 1) \\ &= pq - q - p + 1 \end{aligned}$$

Kasus 4.

Jika $\{u, v\} \in (p) \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$, dengan $u \neq v$, maka $d(u, v) = 2$

$$\begin{aligned} \text{Banyak pasangan } (u, v) &= C_2^{|(p) \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})|} \\ &= \frac{(q-1)!}{2!} \\ &= \frac{(q-1)(q-2)}{2} \\ &= \frac{q^2 - 3q + 2}{2} \end{aligned}$$

Kasus 5.

Jika $u \in (p) \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$ dan $v \in (q) \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$, maka $d(u, v) = 1$

$$\begin{aligned} \text{Banyak pasangan } (u, v) &= |(p) \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})| \cdot |(q) \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})| \\ &= (q-1) \cdot (p-1) \\ &= pq - q - p + 1 \end{aligned}$$

Kasus 6.

Jika $u \in (p) \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$ dan $v \in ((p) \cup (q))^c$, maka $d(u, v) = 2$

$$\begin{aligned} \text{Banyak pasangan } (u, v) &= |(p) \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})| \cdot |((p) \cup (q))^c| \\ &= (q-1) \cdot (pq - q - p + 1) \\ &= pq^2 - q^2 - 2pq + 2q + p - 1 \end{aligned}$$

Kasus 7.

Jika $\{u, v\} \in (q) \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$, dengan $u \neq v$, maka $d(u, v) = 2$

$$\begin{aligned} \text{Banyak pasangan } (u, v) &= C_2^{|(q) \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})|} \\ &= \frac{(p-1)!}{2!} \\ &= \frac{p^2 - 3p + 2}{2} \end{aligned}$$

Kasus 8.

Jika $u \in (q) \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$ dan $v \in ((p) \cup (q))^c$, maka $d(u, v) = 2$

$$\begin{aligned} \text{Banyak pasangan } (u, v) &= |(q) \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})| \cdot |((p) \cup (q))^c| \\ &= (p-1) \cdot (pq - q - p + 1) \\ &= p^2q - p^2 - 2pq + 2p + q - 1 \end{aligned}$$

Kasus 9.

Jika $\{u, v\} \in ((p) \cup (q))^c$, dengan $u \neq v$, maka $d(u, v) = 2$

$$\begin{aligned} \text{Banyak pasangan } (u, v) &= C_2^{|((p) \cup (q))^c|} \\ &= \frac{(pq - q - p + 1)!}{2! \cdot ((pq - q - p + 1) - 2)!} \\ &= \frac{p^2q^2 - 2pq^2 - 2p^2q + q^2 + p^2 + 3pq - q - p}{2} \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa indeks Hyper Wiener pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{pq}}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_{pq}}) &= \left[\frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(\Gamma_{\mathbb{Z}_{pq}})} (d(u,v) + d(u,v)^2) \right] \\
 WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_{pq}}) &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\substack{u \in N(\mathbb{Z}_{pq}) \\ v \in \langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})}} (d(u,v) + d(u,v)^2) \right\} + \left\{ \sum_{\substack{u \in N(\mathbb{Z}_{pq}) \\ v \in \langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})}} (d(u,v) + d(u,v)^2) \right\} \\
 &+ \left\{ \sum_{\substack{u \in N(\mathbb{Z}_{pq}) \\ v \in (\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c}} (d(u,v) + d(u,v)^2) \right\} + \left\{ \sum_{\{u,v\} \in \langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})} (d(u,v) + d(u,v)^2) \right\} \\
 &+ \left\{ \sum_{\substack{u \in \langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq}) \\ v \in \langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})}} (d(u,v) + d(u,v)^2) \right\} + \left\{ \sum_{\substack{u \in \langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq}) \\ v \in (\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c}} (d(u,v) + d(u,v)^2) \right\} \\
 &+ \left\{ \sum_{\{u,v\} \in \langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})} (d(u,v) + d(u,v)^2) \right\} + \left\{ \sum_{\substack{u \in \langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq}) \\ v \in (\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c}} (d(u,v) + d(u,v)^2) \right\} \\
 &+ \left\{ \sum_{\{u,v\} \in (\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c} (d(u,v) + d(u,v)^2) \right\} \\
 WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_{pq}}) &= \frac{1}{2} \left[\{(q-1)(1+1^2)\} + \{(p-1)(1+1^2)\} \right. \\
 &+ \{(pq-q-p+1)(1+1^2)\} + \left\{ \frac{q^2-3q+2}{2} (2+2^2) \right\} \\
 &+ \{(pq-q-p+1)(1+1^2)\} \\
 &+ \{(pq^2-q^2-2pq+2q+p-1)(2+2^2)\} \\
 &+ \left\{ \left(\frac{p^2-3p+2}{2} \right) (2+2^2) \right\} \\
 &+ \{(p^2q-p^2-2pq+2p+q-1)(2+2^2)\} \\
 &+ \left. \left\{ \left(\frac{p^2q^2-2pq^2-2p^2q+q^2+p^2+3pq-q-p}{2} \right) (2+2^2) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_{pq}}) &= \frac{1}{2} \left[\{2(q-1)\} + \{2(p-1)\} + \{2(pq-q-p+1)\} + \left\{6 \frac{q^2-3q+2}{2}\right\} \right. \\ &\quad + \{2(pq-q-p+1)\} + \{6(pq^2-q^2-2pq+2q+p-1)\} \\ &\quad + \left\{6 \frac{p^2-3p+2}{2}\right\} + \{6(p^2q-p^2-2pq+2p+q-1)\} \\ &\quad \left. + \left\{6 \left(\frac{p^2q^2-2pq^2-2p^2q+q^2+p^2+3pq-q-p}{2} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_{pq}}) = \frac{1}{2} [3p^2q^2 - 11pq + 4p + 4q]$$

$$WW(\Gamma_{\mathbb{Z}_{pq}}) = \frac{3}{2}p^2q^2 - \frac{11}{2}pq + 2p + 2q$$

Pada kasus gelanggang \mathbb{Z}_{pq} , struktur graf nilpoten menjadi lebih kompleks dibandingkan dengan \mathbb{Z}_{p^k} karena adanya dua faktor prima yang berbeda. Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, didapatkan bahwa struktur graf nilpoten pada gelanggang ini tidak hanya terdiri dari satu jenis hubungan, tetapi melibatkan beberapa kelompok elemen yang memiliki karakteristik keterhubungan yang berbeda. Pembagian kelompok dalam beberapa partisi menyebabkan variasi jarak antar simpul menjadi lebih beragam. Hal ini berdampak pada nilai indeks Hyper-Wiener, karena setiap pasangan simpul memberi kontribusi yang berbeda tergantung pada jaraknya. Sesuai dengan yang disampaikan Husni et al., (2023) bahwa nilai indeks topologi bergantung pada distribusi jarak dalam graf. Sehingga semakin kompleks struktur graf, semakin kompleks pula nilai indeks yang dihasilkan. Oleh karena itu, hasil pada kasus \mathbb{Z}_{pq} memperlihatkan bahwa kompleksitas struktur graf berbanding lurus dengan kompleksitas perhitungan dan nilai indeks yang diperoleh.

Hasil penelitian ini juga dapat dibandingkan dengan penelitian sebelumnya terkait indeks topologi pada graf nilpoten Husni et al., (2023) yang mengkaji indeks Szeged pada graf nilpoten dan menunjukkan bahwa struktur graf sangat mempengaruhi nilai indeks yang dihasilkan. Dalam penelitian ini, penggunaan indeks Hyper-Wiener memberikan informasi yang lebih komprehensif karena mempertimbangkan jarak dan kuadrat jarak antar simpul. Selain itu, pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini berbeda dengan pendekatan pelabelan graf seperti yang dilakukan oleh Suparta et al., (2024) di mana fokus analisis terletak pada pemberian label untuk membedakan struktur graf. Penelitian ini lebih menekankan pada aspek metrik graf melalui jarak antar simpul. Hal ini menunjukkan bahwa berbagai parameter graf, baik berbasis pelabelan maupun berbasis jarak, dapat digunakan untuk mengkaji struktur graf dari perspektif yang berbeda namun saling melengkapi.

PENUTUP

Penelitian ini mengkaji Indeks Hyper-Wiener dari graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_{p^k} dengan p adalah bilangan prima dan k adalah bilangan asli serta \mathbb{Z}_{pq} dengan p, q adalah bilangan prima. Nilai Indeks Hyper-Wiener yang didapat untuk gelanggang bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_{p^k} adalah $WW(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k})) = \frac{1}{2} [(3p^2 - 4p + 2)p^{2k-2} - (3p - 2)p^{k-1}]$. Sedangkan untuk gelanggang bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_{pq} adalah $WW(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})) = \frac{3}{2}p^2q^2 - \frac{11}{2}pq + 2p + 2q$. Hasil menunjukkan bahwa struktur graf sangat mempengaruhi nilai indeks yang diperoleh. Untuk penelitian selanjutnya, dapat dikaji indeks topologi lain pada graf dengan struktur yang lebih kompleks.

REFERENSI

- Balamoorthy, S., Kavaskar, T., & Vinothkumar, K. (2024). Harary and hyper-Wiener indices of some graph operations. *Journal of Inequalities and Applications*, 2024(1). <https://doi.org/10.1186/s13660-024-03112-6>
- Ghoffari, L. H., Wardhana, I. G. A. W., Dewi, P. K., & Suparta, I. N. (2025). Eigen Mathematics Journal Hyper-Wiener and Szeged Indices of non-Coprime Graphs of Modulo Integer Groups. *Eigen Mathematics Journal*, 8(1). <https://doi.org/10.29303/emj.vxiy.xxx>
- Husni, M. N., Wardhana, I. G. A. W., Dewi, P. K., & Suparta, I. N. (2023). Szeged Index and Padmakar-Ivan Index of Nilpotent Graph of Integer Modulo Ring with Prime Power Order. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, 20(2), 332–339. <https://doi.org/10.20956/j.v20i2.31418>
- Lestari, S. T., Dewi, P. K., Wardhana, I. G. A. W., & Suparta, I. N. (2024). Algebraic Structures and Combinatorial Properties of Unit Graphs in Rings of Integer Modulo with Specific Orders. *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, 7(2), 89–92. <https://doi.org/10.29303/emj.v7i2.235>
- Malik, D. P., Husni, M. N., Miftahurrahman, M., Wardhana, I. G. A. W., & Ismail, G. @ S. (2024). The Chemical Topological Graph Associated with The Nilpotent Graph of A Modulo Ring of Prime Power Order. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 7(1), 1–9. <https://doi.org/10.14710/jfma.v0i0.20269>
- Malik, D. P., Wardhana, I. G. A. W., Dewi, P. K., Widiastuti, R. S., Maulana, F., Syarifudin, A. G., & Awanis, Z. Y. (2023). Graf Nilpoten Dari Gelanggang Bilangan Bulat Modulo Berorde Pangkat Prima. *JMPM: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 8(1), 28–33. <https://doi.org/10.26594/jmpm.v8i1.2920>
- Nikmehr, M. J., & Khojasteh, S. (2013). On the nilpotent graph of a ring. *Turkish Journal of Mathematics*, 37(4), 553–559. <https://doi.org/10.3906/mat-1112-35>
- Suparta, I. N., Candiasa, M., Prasancika, W. A., & Bača, M. (2024). Modular Irregularity Strength of Dense Graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 12(1), 105–116. <https://doi.org/10.5614/EJGTA.2024.12.1.9>
- Suparta, I. N., Lin, Y., Hasni, R., & Budayana, I. N. (2025). On odd-graceful coloring of graphs. *Communications in Combinatorics and Optimization*, 10(2), 335–354. <https://doi.org/10.22049/CCO.2023.28736.1692>
- Suparta, I. N., Venkathacalam, M., Gunadi, I. G. A., & Pratama, P. A. C. (2023). Graceful Chromatic Number of Some Cartesian Product Graphs. *Ural Mathematical Journal*, 9(2), 193–208. <https://doi.org/10.15826/umj.2023.2.016>
- Tahya, F., & Persulesy, E. R. (2020). Nilpotent Graph in Ring Zn. *Journal of Physics: Conference Series*, 1463(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1463/1/012007>