

## **Perbandingan Akurasi Model Eksponensial, Hiperbolik, dan Logistik dalam Peramalan Jumlah Penduduk Kota Surabaya**

**Jihan Tria Marena<sup>1</sup>, Kresna Oktafianto<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>Universitas PGRI Ronggolawe Tuban

[ijihantria04@gmail.com](mailto:ijihantria04@gmail.com)

### **Abstrak**

Kota Surabaya sebagai pusat pertumbuhan ekonomi, perdagangan, industri, dan Pendidikan di Kawasan Timur Indonesia mengalami tekanan demografis akibat urbanisasi yang pesat. Proyeksi jumlah penduduk yang akurat diperlukan sebagai dasar perencanaan Pembangunan berkelanjutan. Penelitian ini bertujuan menganalisis dan membandingkan kinerja tiga model matematika pertumbuhan populasi, yaitu model eksponensial, hiperbolik, logistik, dalam memprediksi jumlah penduduk Kota Surabaya. Data sekunder berupa *time-series* jumlah penduduk tahun 2014-2024 diolah dengan menggunakan persamaan diferensial masing-masing model. Tingkat keakuratan model dievaluasi berdasarkan *nilai Mean Absolute Percentage Error* (MAPE). Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai eksponensial menghasilkan MAPE sebesar 1.240023%, model hiperbolik sebesar 1,25509879%, dan model logistik sebesar 0,993248%. Model logistik terbukti paling akurat dengan MAPE terkecil dan dipilih sebagai model yang tepat untuk proyeksi jangka Panjang. Hasil proyeksi dengan model logistik memperkirakan jumlah penduduk Kota Surabaya pada tahun 2035 mencapai 3.244.200 jiwa. Rekomendasi penelitian ini diharapkan dapat menjadi acuan ilmiah bagi pemerintah kota dalam merumuskan kebijakan Pembangunan yang berkelanjutan dan responsive terhadap dinamika kependudukan.

**Kata Kunci:** Pertumbuhan Populasi; Eksponensial; Hiperbolik; Logistik; MAPE

### **ABSTRACT**

Rapid urbanization is putting demographic pressure on Surabaya City, the hub of Eastern Indonesia's trade, industry, education, and economic growth. Planning for sustainable development requires precise population estimates. The purpose of this study is to evaluate and contrast how well three mathematical models of population growth—the logistic, exponential, and hyperbolic models—predict Surabaya City's population. The differential equations of each model are used to handle secondary data in the form of a time-series of population figures from 2014 to 2024. The Mean Absolute Percentage Error (MAPE) value is used to assess the model's accuracy. The findings indicate that the logistic model yields a MAPE of 0.0119190%, the hyperbolic model yields a MAPE of 1.25509879%, and the exponential value yields a MAPE of 1.240023%. The logistic model was selected as the best model for long-term projections since it was the most accurate and had the lowest MAPE. According to the logistic model forecast estimates, Surabaya City's population is expected to reach 3,244,200 in 2035. It is envisaged that city governments would be able to use the research's suggestions as a scientific guide when creating population-responsive sustainable development policies.

**Keywords:** Population Growth, Exponential, Hyperbolic, Logistic, MAPE

### **PENDAHULUAN**

Kota Surabaya merupakan salah satu negara dengan jumlah penduduk terbanyak nomor 2 di Indonesia (Salim, 2023). Seiring dengan perannya sebagai pusat ekonomi, perdagangan, industri, dan pendidikan di kawasan timur Indonesia, kota ini mengalami tekanan demografis yang signifikan. Dalam beberapa tahun terakhir, Surabaya telah mengalami laju urbanisasi yang pesat, yang ditandai dengan peningkatan jumlah penduduk yang bermigrasi dari daerah pedesaan ke perkotaan (Pida dkk., 2025)

Sebagian besar penduduk yang di kota Surabaya mempunyai pekerjaan di bidang non pertanian. wilayah perkotaan sangat berkembang, artinya terdapat kepadatan penduduk seperti rumah, bangunan, komersial, jalan, jembatan, dan kereta api. Wilayah perkotaan mengalami perkembangan yang pesat, ditandai dengan tingginya kepadatan penduduk serta keberadaan infrastruktur seperti perumahan, bangunan komersial, jalan raya, jembatan, dan jalur kereta api. Surabaya menjadi pusat urbanisasi penduduk Indonesia, menampung sebagian besar aset terbangun dan aktivitas ekonomi, yang sekaligus menjadikannya rentan terhadap dampak perubahan iklim. Selain itu, wilayah perkotaan juga menyumbang porsi besar terhadap emisi gas rumah kaca secara global (Carolin & Kurniati, 2025).

Untuk mengantisipasi dan memitigasi dampak negatif ini, Pemerintah Kota Surabaya membutuhkan perencanaan pembangunan yang strategis dan berbasis data, dengan meningkatkan kapasitas dalam mengatasi permasalahan lingkungan melalui rencana dan praktik tata kota yang ramah lingkungan Hal ini mencakup perlunya kebijakan pengaturan lahan hijau perkotaan, infrastruktur yang baik, dan kesadaran Masyarakat (Agustine dkk., 2025). Semua bergantung pada proyeksi jumlah penduduk di masa mendatang yang akurat.

Oleh karena itu, permodelan matematika menjadi alat yang sangat krusial untuk memprediksi pertumbuhan populasi (Salsabila dkk., 2024). Pertumbuhan populasi dapat diprediksi dengan menggunakan persamaan differensial. Pertumbuhan populasi dipengaruhi oleh jumlah populasi yang ada saat ini dan jumlah populasi yang ada beberapa waktu yang lalu serta berapa lama waktu yang digunakan untuk merepresentasikan perubahan populasi terhadap waktu (Remetwa, 2025). Tiga model dasar yang sering digunakan adalah model eksponensial, model hiperbolik, dan model logistik. Model eksponensial menggambarkan pertumbuhan populasi tanpa batasan lingkungan, sedangkan model logistik mempertimbangkan pertumbuhan populasi dengan memperhitungkan keterbatasan daya dukung lingkungan (Khairunnisa, 2025). Model hiperbolik memiliki pertumbuhan yang semakin cepat seiring tumbuhnya penduduk dan sering digunakan untuk memprediksi pertumbuhan populasi suatu tempat .

Ketiga model ini memiliki asumsi dan karakteristik yang berbeda, sehingga tingkat keakuratannya dalam memprediksi pertumbuhan populasi Surabaya akan bervariasi. Kebutuhan untuk mengidentifikasi model terbaik yang paling sesuai dengan karakteristik dinamika penduduk Surabaya menjadi hal yang mendesak. Keakuratan suatu model dapat diukur secara kuantitatif menggunakan model statistik seperti *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE). Nilai MAPE yang lebih kecil mengindikasikan bahwa selisih antara data akurat dan hasil prediksi model lebih kecil, yang berarti model tersebut lebih akurat dan reliabel.

Berbagai penelitian terdahulu telah mengkaji penerapan model matematika berbasis persamaan diferensial dalam proyeksi pertumbuhan penduduk di Indonesia. Kurniawan dkk. (2017) melakukan penelitian tentang aplikasi persamaan diferensial model eksponensial dan logistik pada pertumbuhan penduduk Kota Surabaya menggunakan data periode 2011–2015 dan berhasil mengidentifikasi model terbaik berdasarkan nilai galat terkecil. Penelitian tersebut menjadi dasar awal bagi penelitian serupa di berbagai wilayah Indonesia, sekaligus menunjukkan nilai pedagogis pemodelan populasi sebagai aplikasi nyata persamaan diferensial dalam pembelajaran matematika (Kurniawan dkk., 2017). Nuraeni (2017) dalam jurnal Delta: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika juga menegaskan bahwa persamaan diferensial dapat diterapkan dalam estimasi jumlah populasi menggunakan dua model, yaitu model eksponensial dan model logistik, dan menyimpulkan bahwa penerapan ini relevan sebagai materi pembelajaran matematika terapan di perguruan tinggi (Nuraeni, 2017).

Sejalan dengan itu, Khasanah dan Suryani (2022) dalam Jurnal Fourier membandingkan model eksponensial dan logistik pada data penduduk Provinsi Riau dan menyimpulkan bahwa model logistik unggul dalam proyeksi jangka panjang karena

mempertimbangkan kapasitas lingkungan. Penelitian tersebut juga mencatat bahwa model pertumbuhan populasi dapat diadaptasi sebagai contoh soal dalam mata kuliah persamaan diferensial, sehingga memperkaya pembelajaran matematika di perguruan tinggi (Suryani & Khasanah, 2022).

Salsabila dkk. (2024) juga telah membuktikan keunggulan model hiperbolik dalam kasus populasi Kota Singkawang, yang menunjukkan bahwa pemilihan model yang tepat sangat bergantung pada karakteristik data populasi di setiap wilayah (Salsabila dkk., 2024).

Berdasarkan tinjauan penelitian terdahulu, terdapat beberapa kesenjangan yang perlu diisi. Pertama, sebagian besar penelitian terdahulu hanya membandingkan dua model (eksponensial dan logistik), sementara model hiperbolik jarang diikutsertakan dalam komparasi tiga model sekaligus. Kedua, penelitian yang secara eksplisit mengaitkan komparasi ketiga model tersebut dengan nilai pedagogisnya sebagai konteks pembelajaran matematika persamaan diferensial di perguruan tinggi masih sangat terbatas. Ketiga, data penduduk Kota Surabaya yang digunakan penelitian terdahulu (Kurniawan dkk., 2017) sudah tidak mutakhir, sehingga diperlukan pembaruan dengan data terkini 2014–2024 yang mencakup periode pandemi COVID-19 (Kurniawan dkk., 2017). Penelitian ini hadir untuk mengisi kesenjangan tersebut dengan melakukan komparasi tiga model sekaligus berbasis data terbaru dan mengeksplorasi implikasinya dalam pembelajaran matematika di perguruan tinggi.

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis dan membandingkan kinerja model eksponensial, hiperbolik, dan logistik dalam memodelkan pertumbuhan populasi Kota Surabaya menggunakan pendekatan persamaan diferensial, sekaligus mengeksplorasi nilai pedagogis ketiga model tersebut sebagai konteks pembelajaran matematika yang autentik dan bermakna di perguruan tinggi. Dengan mengidentifikasi model dengan nilai MAPE terkecil, penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi pada pengembangan bahan ajar matematika terapan yang relevan dan kontekstual, serta menjadi referensi bagi dosen matematika dalam merancang pembelajaran persamaan diferensial berbasis masalah nyata.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini dirancang sebagai studi kuantitatif dengan pendekatan pemodelan matematika untuk menganalisis pola historis dan memproyeksikan pertumbuhan populasi Kota Surabaya. Metodologi yang diterapkan bersifat sistematis dan terstruktur, mengikuti paradigma penelitian eksploratif-analitik yang bertujuan untuk mengembangkan, membandingkan, dan mengevaluasi model-model pertumbuhan demografis. Penelitian ini menggunakan desain studi kasus tunggal, dengan data sekunder *time-series* jumlah penduduk Kota Surabaya sebagai unit analisis utama, yang diolah dan dimodelkan untuk menghasilkan proyeksi dan implikasi kebijakan.

Pengumpulan data dilakukan melalui studi dokumentasi terhadap sumber-sumber sekunder resmi. Data jumlah penduduk tahunan diambil dari publikasi statistik Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Surabaya, dengan periode pengamatan yang memadai untuk analisis *time-series*, yaitu dari tahun 2014 sampai dengan 2024. Sebelum dianalisis, data menjalani tahap *preprocessing* yang meliputi pengecekan konsistensi kronologis, identifikasi *missing data*, dan transformasi ke dalam format yang kompatibel dengan perangkat lunak analitik. Seluruh data dikonfirmasi ulang melalui *cross-checking* antar sumber untuk memastikan validitas dan akurasinya.

## Pertumbuhan Populasi

Pertumbuhan populasi adalah peningkatan jumlah penduduk di suatu negara wilayah pada waktu tertentu yang dipengaruhi oleh kelahiran, kematian, migrasi (Syawal dkk., 2025).

Model eksponensial, yang dicirikan oleh kurva berbentuk J, mengasumsikan ketersediaan sumber daya yang tak terbatas, sehingga populasi dapat meningkat pada laju intrinsik maksimumnya. Model ini sering terlihat pada fase kolonisasi awal atau dalam lingkungan yang sangat ideal, namun tidak sustainable dalam jangka panjang. Sebaliknya, model logistik, dengan kurva berbentuk S, memperhitungkan faktor pembatas lingkungan yang membentuk daya dukung (*carrying capacity*/K). Dalam model ini, laju pertumbuhan akan melambat dan akhirnya stabil mendekati nilai K, ketika tekanan seperti kompetisi intraspesifik, keterbatasan pangan, ruang, dan akumulasi limbah mulai berlaku. Pemahaman terhadap kedua model ini crucial, karena tidak hanya menjelaskan dinamika pertumbuhan populasi, tetapi juga memberikan lensa analitis untuk mengkaji fenomena kependudukan manusia, urbanisasi, serta implikasinya terhadap ketahanan pangan, keberlanjutan lingkungan, dan stabilitas sosial-ekonomi secara global.

### Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde yang terbagi menjadi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP) (Nuraeni, 2017). Dimana  $y(x)$  sebagai bentuk fungsi satu variabel, dengan  $x$  variabel bebas dan  $y$  variabel tak bebas pada persamaan diferensial dinyatakan dalam bentuk:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (1)$$

### Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

Mean *Absolute Percentage Error* (MAPE) bertujuan untuk menilai kecocokan dari suatu model dalam proyeksi penduduk dan digunakan dalam memilih model terbaik dari model-model lainnya. Salah satu model dengan hasil MAPE yang lebih kecil adalah model yang dipilih dari model lainnya. Bentuk matematika dari MAPE sebagai berikut :

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left| \frac{Y_{(t)} - \hat{Y}_{(t)}}{Y_{(t)}} \right| \times 100\% \quad (2)$$

Keterangan :

$Y_{(t)}$  = Jumlah penduduk pada waktu sebenarnya pada waktu t (jiwa)

$\hat{Y}_{(t)}$  = Jumlah penduduk proyeksi pada waktu t (jiwa)

$N$  = Jumlah data

Interprestasi *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE)

$MAPE < 10\%$  = Sangat Akurat

$10\% \leq MAPE < 15\%$  = Sangat Baik

$15\% \leq MAPE < 20\%$  = Baik

$20\% \leq MAPE < 50\%$  = Masuk Akal

$MAPE > 50\%$  = Tidak Akurat

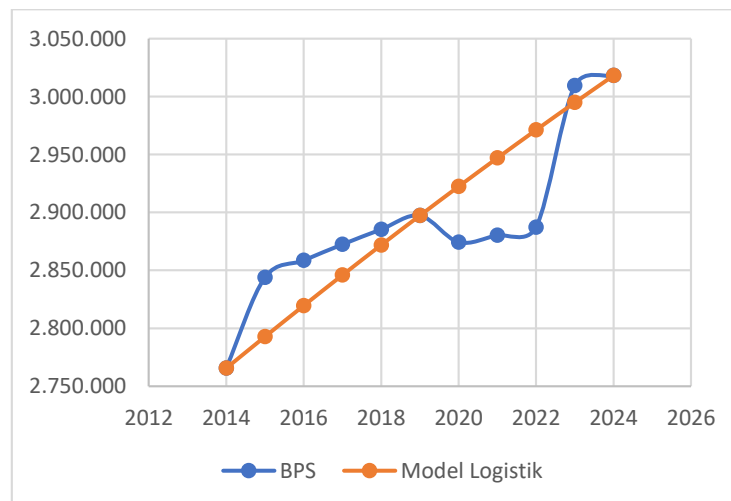
### HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada data pertumbuhan populasi Kota Surabaya digunakan pada proyeksi penduduk menggunakan model Eksponensial, model Hiperbolik, model Logistik. Data yang digunakan

adalah jumlah penduduk Kota Surabaya pada tahun 2014 sampai dengan 2024. Berikut jumlah penduduk 2014 sampai dengan 2024 :

**Tabel 1.** Jumlah Penduduk Kota Surabaya

| TAHUN | DATA BPS  |
|-------|-----------|
| 2014  | 2.765.487 |
| 2015  | 2.843.760 |
| 2016  | 2.858.493 |
| 2017  | 2.872.323 |
| 2018  | 2.885.245 |
| 2019  | 2.897.245 |
| 2020  | 2.874.314 |
| 2021  | 2.880.284 |
| 2022  | 2.887.223 |
| 2023  | 3.009.286 |
| 2024  | 3.018.022 |



**Gambar 4.** Grafik Perbandingan Data BPS dan Model Logistik

Berdasarkan Gambar 1. Jumlah penduduk Kota Surabaya dapat di simpulkan bahwa dari tahun ke tahun mengalami peningkatan yang signifikan dan pada tahun 2020 mengalami penurunan yang cukup tinggi. Sehingga dengan menerapkan model eksponensial, hiperbolik, dan logistik bertujuan untuk mengelola dan mengatur pengendalian jumlah penduduk Kota Surabaya dengan cara memprediksi pertumbuhan penduduk Kota Surabaya.

### Model Eksponensial

Model eksponensial untuk mengestimasi populasi yang laju pertumbuhannya stabil (Khasanah & Suryani, 2022). Model ini didasarkan pada asumsi bahwa setiap individu dalam populasi memiliki potensi reproduksi yang sama dan tidak ada faktor pembatas seperti keterbatasan sumber daya.

$$\frac{dP}{dt} = r P(t) \quad (3)$$

Solusi khusus persamaan 3 :

$$P(t) = P_0 e^{rt} \quad (4)$$

$P(t)$  = Jumlah populasi pada waktu  $t$  (jiwa)

$P_0$  = Jumlah populasi awal pada  $t = 0$  (jiwa)

$r$  = Laju pertumbuhan populasi (per tahun)

$t$  = Waktu (tahun)

Perhitungan proyeksi Kota Surabaya dengan model eksponensial dengan asumsi pada tahun 2014 ( $t = 0$ ) dan tahun 2024 ( $t = 10$ ), jumlah penduduk awal  $P_0 = 2.765.487$  jiwa dan jumlah penduduk  $P_{10} = 3.018.022$  jiwa, nilai laju pertumbuhan populasi ( $r$ ) diperoleh:

$$\begin{aligned} r &= \ln\left(\frac{P(t)}{P_0}\right) \\ &= \ln\left(\frac{3.018.022}{2.765.487}\right) \\ &= 0,00873849 \end{aligned} \quad (5)$$

Substitusikan  $r$  ke solusi khusus model eksponensial maka diperoleh :

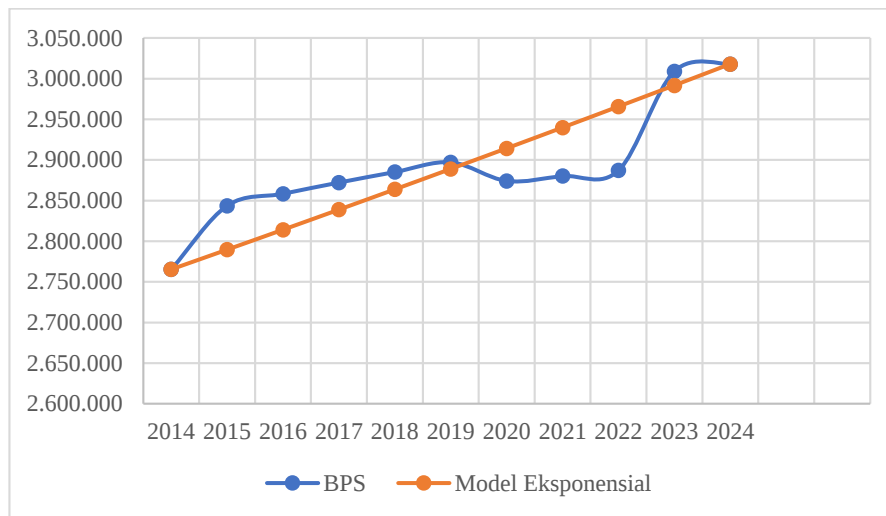
$$P(t) = 2.765.487^{(0,00873849)t} \quad (6)$$

Selanjutnya, menghitung proyeksi penduduk pada tahun yang akan dicari dengan persamaan (6) dan mencari galat untuk hitung nilai MAPE dengan *software Microsoft Office Excel*. Hasil perhitungan proyeksi penduduk Kota Surabaya model eksponensial dengan  $r = 0,00873849$  dapat dilihat pada Tabel 2.

**Tabel 2.** Hasil Perhitungan Model Eksponensial

| Tahun | BPS       | Model Eksponensial | Galat  |
|-------|-----------|--------------------|--------|
| 2014  | 2,765,487 | 2,765,487          | 0      |
| 2015  | 2,843,760 | 2,789,759          | 54,001 |
| 2016  | 2,858,493 | 2,814,244          | 44,249 |
| 2017  | 2,872,323 | 2,838,944          | 33,379 |
| 2018  | 2,885,245 | 2,863,861          | 21,384 |
| 2019  | 2,897,245 | 2,888,996          | 8,249  |
| 2020  | 2,874,314 | 2,914,353          | 40,039 |
| 2021  | 2,880,284 | 2,939,931          | 59,647 |
| 2022  | 2,887,223 | 2,965,734          | 78,511 |
| 2023  | 3,009,286 | 2,991,764          | 17,522 |
| 2024  | 3,018,022 | 3,018,022          | 0      |

Grafik jumlah penduduk Kota Surabaya berdasarkan data BPS dan hasil proyeksi model hiperbolik dapat dilihat pada Gambar 2.



**Gambar 2.** Grafik Perbandingan Data BPS dan Model Ekspensial

Berdasarkan Gambar 2, ditunjukkan bahwa jumlah penduduk Kota Surabaya yang dihasilkan dari model eksponensial mendekati data yang didapat dari BPS. Hal ini dapat diartikan model eksponensial cukup akurat dalam prediksi jumlah penduduk Kota Surabaya. Selanjutnya mencari nilai MAPE dengan persamaan (1) untuk model eksponensial dengan  $n = 10$ , sehingga diperoleh 1.240023%.

### Model Hiperbolik

Model hiperbolik pada pertumbuhan populasi yang mengikuti kurva hiperbolik. Pada pertumbuhan hiperbolik, laju pertumbuhan relatif ( $r$ ) pada akhirnya sebanding dengan ukuran populasi (Korotayev & Khalitourina, n.d.). Diasumsikan laju pertumbuhan  $r(P)$  bergantung pada ukuran populasi  $P$ , yaitu:

$$\frac{dP}{dt} = r(P)P \quad (7)$$

Untuk mempertahankan dimensi dalam persamaan, dapat dijelaskan bahwa:

$$r(P) = \frac{rP}{P_0} \quad (8)$$

Sehingga persamaan diferensial menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= r(P)P \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{rP}{P_0} P \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{rP^2}{P_0} \end{aligned} \quad (9)$$

Selanjutnya selesaikan persamaan (8) dengan pemisahan variabel kemudian integrasikan kedua sisi sehingga diperoleh solusi khusus model pertumbuhan hiperbolik yaitu:

$$P(t) = \frac{P_0}{1 - rt} \quad (10)$$

Keterangan:

$P(t)$  : jumlah populasi pada waktu  $t$  (jiwa)

$P_0$  : jumlah populasi awal pada waktu  $t = 0$  (jiwa)

$r$  : laju pertumbuhan populasi per tahun

$t$  : waktu (tahun)

Proyeksi penduduk Kota Surabaya model hiperbolik dengan asumsi pada tahun 2014 ( $t = 0$ ) dan tahun 2024 ( $t = 10$ ) jumlah penduduk awal ( $P(0)$ ) = 2,765,487 jiwa dan jumlah penduduk pada ( $P(10)$ ) = 3,018,022 jiwa. Nilai laju pertumbuhan populasi ( $r$ ) didapatkan:

$$r = \frac{\left(1 - \frac{P_0}{P(t)}\right)}{t} = \frac{\left(1 - \frac{P(2014)}{P(2024)}\right)}{10} = 0.0083676 \quad (11)$$

Sehingga didapatkan nilai  $r$ , substitusikan nilai  $r$  ke solusi khusus model hiperbolik maka diperoleh model hiperbolik:

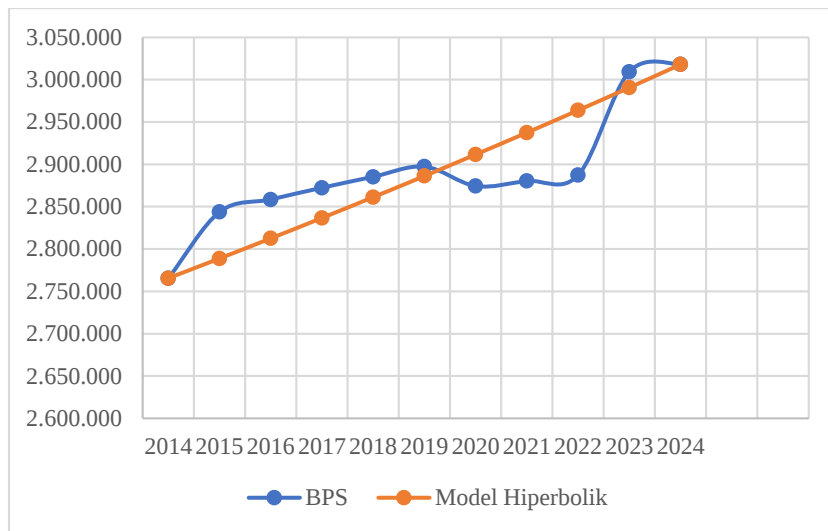
$$P(t) = \frac{2,765,487}{1 - (0.0083676)t} \quad (12)$$

Selanjutnya, menghitung proyeksi penduduk pada tahun yang akan dicari dengan persamaan (12) dan mencari galatnya untuk menghitung nilai MAPE dengan bantuan *Software Microsoft Office Excel*. Hasil perhitungan secara lengkap proyeksi penduduk Kota Surabaya model hiperbolik dengan  $r = 0.0083676$  dapat dilihat pada Tabel 3.

**Tabel 3.** Hasil Perhitungan Model Hiperbolik

| Tahun | BPS       | Model Hiperbolik | Galat  |
|-------|-----------|------------------|--------|
| 2014  | 2,765,487 | 2,765,487        | 0      |
| 2015  | 2,843,760 | 2,788,823        | 54,937 |
| 2016  | 2,858,493 | 2,812,555        | 45,938 |
| 2017  | 2,872,323 | 2,836,696        | 35,627 |
| 2018  | 2,885,245 | 2,861,254        | 23,991 |
| 2019  | 2,897,245 | 2,886,241        | 11,004 |
| 2020  | 2,874,314 | 2,911,668        | 37,354 |
| 2021  | 2,880,284 | 2,937,548        | 57,264 |
| 2022  | 2,887,223 | 2,963,891        | 76,668 |
| 2023  | 3,009,286 | 2,990,712        | 18,574 |
| 2024  | 3,018,022 | 3,018,022        | 0      |

Grafik jumlah penduduk Kota Surabaya berdasarkan data BPS dan hasil proyeksi model hiperbolik dapat dilihat pada Gambar 2.



**Gambar 3.** Grafik Perbandingan Data BPS dan Model Hiperbolik

Berdasarkan Gambar 3, ditunjukkan bahwa jumlah penduduk Kota Surabaya yang dihasilkan model hiperbolik mendekati data yang didapatkan dari BPS. Hal ini dapat dikatakan model hiperbolik cukup akurat dalam memprediksi jumlah penduduk Kota Surabaya. Selanjutnya mencari nilai MAPE dengan menggunakan Persamaan (1) untuk model hiperbolik dengan  $n = 10$ , sehingga diperoleh 1.25509879%.

### Model Logistik

Model logistik digunakan untuk mengetahui perubahan jumlah populasi yang diturunkan terhadap waktu sehingga fenomena dari perubahan jumlah populasi, Laju pertumbuhan populasi ( $r$ ) dalam model pertumbuhan logistik digunakan untuk mengetahui daya tumbuh populasi dan kapasitas batas lingkungan atau *Carrying Capacity* ( $K$ ) digunakan sebagai faktor penghambat pertumbuhan populasi (Nurmadhani dkk., 2022). Laju pertumbuhan populasi mempunyai persamaan logistik sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right) \quad (13)$$

Solusi persamaan logistik dapat diperoleh dengan pemisahan variabel kemudian integrasikan kedua sisi sehingga diperoleh solusi umum model pertumbuhan logistik yaitu:

$$P = \frac{K e^{rt+c}}{1 + e^{rt+c}} \quad (14)$$

Dari persamaan (13) asumsikan nilai awal  $t = 0$  dan  $P(0) = P_0$  lalu substitusikan ke dalam persamaan (14) diperoleh  $c = \ln \left( \frac{P_0}{K-P_0} \right)$  kemudian nilai  $c$  disubstitusikan kembali ke dalam Persamaan (14), sehingga diperoleh solusi khusus dari model logistik sebagai berikut:

$$P(t) = \left( \frac{K}{1 + \left( \frac{K}{P_0} - 1 \right) e^{-rt}} \right) \quad (15)$$

Keterangan:

$P(t)$  : jumlah populasi pada waktu  $t$  (jiwa)  
 $P_0$  : jumlah populasi awal  $t = 0$  (jiwa)  
 $K$  : daya tampung (*carrying capacity*) (jiwa)  
 $r$  : laju pertumbuhan populasi per tahun  
 $t$  : waktu (tahun)

Dengan  $K$  diperoleh dari:

$$K = \frac{P(1)(P(1)P(0) - 2P(0)P(2) + P(1)P(2))}{P(1)^2 - P(0)P(2)} \quad (16)$$

Diperoleh nilai *carrying capacity* yaitu  $K = 3,863,237$  jiwa. Selanjutnya,  $K$  dan  $P(0)$  disubstitusikan ke Persamaan (15). Diperoleh model logistik:

$$P(t) = \frac{3,863,237}{\left( 1 + \left( \frac{3,863,237}{2,765,487} - 1 \right) e^{-rt} \right)} \quad (17)$$

Selanjutnya, hitung proyeksi penduduk Kota Surabaya menggunakan model logistik dengan asumsi pada tahun 2014 ( $t = 0$ ) dan tahun 2024 ( $t = 10$ ) jumlah penduduk awal ( $P(0) = 2,765,487$  jiwa dan jumlah penduduk ( $P(10) = 3,018,022$  jiwa. Nilai laju pertumbuhan populasi ( $r$ ) dapat dihitung menggunakan Persamaan (16), diperoleh:

$$\begin{aligned} P(10) &= \frac{3,863,237}{[1 + (0.396946)e^{-rt}]} \\ 3,018,022 &= \frac{3,863,237}{[1 + (0.396946)e^{-rt}]} \\ r &= 0.034881 \end{aligned} \quad (18)$$

Sehingga didapatkan nilai  $r$ , substitusikan nilai  $r$  ke solusi khusus model logistik maka diperoleh model logistik:

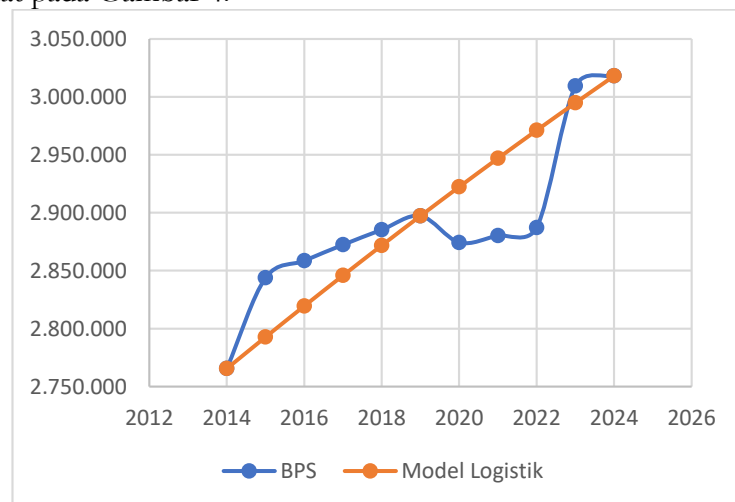
$$P(t) = \frac{3,863,237}{[1 + (0.396946)e^{-(0.034881)t}]} \quad (19)$$

Selanjutnya, menghitung proyeksi penduduk pada tahun yang akan dicari dengan persamaan (19) dan mencari galatnya untuk menghitung nilai MAPE dengan bantuan *Software Microsoft Office Excel*. Hasil perhitungan secara lengkap proyeksi penduduk Kota Surabaya model logistik  $r = 0.029068$  dapat dilihat pada Tabel 4.

**Tabel 4.** Hasil Perhitungan Model Logistik

| Tahun | BPS       | Model Logistik | Galat  | r         |
|-------|-----------|----------------|--------|-----------|
| 2014  | 2,765,487 | 2,765,487      | 0      | 0.0000000 |
| 2015  | 2,843,760 | 2,792,690      | 51,070 | 0.0179587 |
| 2016  | 2,858,493 | 2,819,473      | 39,020 | 0.0136506 |
| 2017  | 2,872,323 | 2,845,830      | 26,493 | 0.0092235 |
| 2018  | 2,885,245 | 2,871,756      | 13,489 | 0.0046753 |
| 2019  | 2,897,245 | 2,897,245      | 0      | 0.0000000 |
| 2020  | 2,874,314 | 2,922,294      | 47,980 | 0.0166926 |
| 2021  | 2,880,284 | 2,946,898      | 66,614 | 0.0231277 |
| 2022  | 2,887,223 | 2,971,056      | 83,833 | 0.0290358 |
| 2023  | 3,009,286 | 2,994,764      | 14,522 | 0.0048256 |
| 2024  | 3,018,022 | 3,018,022      | 0      | 0.0000000 |

Grafik jumlah penduduk Kota Surabaya berdasarkan data BPS dan hasil proyeksi model logistik dapat dilihat pada Gambar 4.

**Gambar 4.** Grafik Perbandingan Data BPS dan Model Logistik

Berdasarkan Gambar 4, ditunjukkan bahwa jumlah penduduk Kota Surabaya yang dihasilkan model logistik mendekati data yang didapat dari BPS. Hal ini dapat dikatakan model logistik cukup akurat dalam prediksi jumlah penduduk Kota Surabaya. Selanjutnya mencari nilai MAPE dengan Persamaan (1) untuk model logistik dengan  $n = 10$ , sehingga diperoleh 1.191897%. Menghitung proyeksi jumlah penduduk Kota Surabaya pada tahun 2035 dengan Persamaan (19) diperoleh:

$$P(21) = \frac{3,863,237}{[1 + (0.396946)e^{-(0.034881)}]} \quad (20)$$

$$2035 = 3,244,200$$

## PEMBAHASAN

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa ketiga model matematika pertumbuhan populasi eksponensial, hiperbolik, dan logistik mampu mendekati data riil BPS Kota

Surabaya dengan tingkat akurasi yang baik ( $MAPE < 10\%$ ). Namun demikian, terdapat perbedaan signifikan dalam karakteristik dan kecocokan masing-masing model terhadap dinamika kependudukan Surabaya yang perlu dibahas secara mendalam.

Model eksponensial menghasilkan MAPE sebesar 1,240023%, yang menunjukkan tingkat akurasi sangat baik dalam kisaran data historis 2014–2024. Hasil ini sejalan dengan temuan Khasanah dan Suryani (2022) yang membuktikan bahwa model eksponensial dapat memberikan estimasi yang cukup akurat untuk rentang data jangka menengah ketika laju pertumbuhan relatif stabil. Akan tetapi, model eksponensial memiliki kelemahan mendasar secara teoritis, yakni asumsi pertumbuhan tanpa batas yang tidak mempertimbangkan faktor pembatas lingkungan seperti keterbatasan lahan, fasilitas publik, dan daya tampung kota. Dalam konteks Kota Surabaya sebagai kota metropolitan yang telah mendekati batas kapasitas infrastrukturnya, asumsi ini menjadi tidak realistis untuk proyeksi jangka panjang. Michael dan Kriswanto (2026) juga menegaskan bahwa model eksponensial lebih tepat digunakan pada fase awal pertumbuhan atau ketika populasi masih jauh dari titik jenuh lingkungannya.

Model hiperbolik menghasilkan MAPE sebesar 1,255099%, sedikit lebih tinggi dibandingkan model eksponensial. Secara konseptual, model hiperbolik mengasumsikan laju pertumbuhan yang semakin cepat seiring meningkatnya ukuran populasi, sebagaimana diuraikan oleh Korotayev dan Khalitourina. Prihandono dkk. (2024) dalam penelitian pemodelan pertumbuhan populasi Kota Singkawang juga menemukan bahwa model hiperbolik cenderung memberikan estimasi yang kurang stabil pada fase pertumbuhan yang melambat. Hal ini konsisten dengan temuan pada penelitian ini, di mana model hiperbolik menghasilkan galat yang relatif lebih besar pada tahun-tahun ketika pertumbuhan penduduk Surabaya mengalami perlambatan, khususnya pada periode sekitar tahun 2020 yang mengalami penurunan populasi akibat dampak pandemi COVID-19. Ketidakmampuan model hiperbolik menangkap fenomena penurunan populasi sementara ini menjadi salah satu indikator keterbatasan model tersebut untuk kasus Surabaya.

Model logistik terbukti menghasilkan MAPE terkecil, yaitu 1,191897%, sehingga menjadi model paling akurat di antara ketiganya. Keunggulan model logistik ini secara teoritis dapat dijelaskan melalui konsep *carrying capacity* ( $K = 3.863.237$  jiwa) yang mencerminkan batas daya tampung lingkungan Kota Surabaya. Model ini mampu menangkap pola pertumbuhan yang melambat ketika populasi mendekati kapasitas maksimal kota, yang merupakan karakteristik nyata dari dinamika kependudukan kota besar. Temuan ini konsisten dengan penelitian Nurmadhani dkk. (2022) yang menunjukkan bahwa model logistik lebih unggul dalam merepresentasikan pertumbuhan populasi di wilayah dengan tekanan demografis tinggi (Nurmadhani dkk., 2022). Selain itu, Khairunnisa (2025) dalam penelitiannya tentang proyeksi penduduk Kabupaten Lombok Timur juga menyimpulkan bahwa model logistik memberikan akurasi lebih baik dibandingkan model eksponensial, terutama ketika populasi menunjukkan tanda-tanda mendekati titik kejenuhan. Syawal dkk. (2025) dalam kajiannya menggunakan model Verhulst (yang secara matematis identik dengan model logistik) untuk Provinsi Sulawesi Selatan juga membuktikan keunggulan model logistik dalam mengestimasi populasi wilayah dengan pertumbuhan yang terbatas oleh kapasitas lingkungan.

Perbandingan nilai MAPE ketiga model disajikan pada Tabel 5 berikut.

**Tabel 5. Perbandingan Nilai MAPE Ketiga Model**

| Model        | MAPE (%) | Kategori      |
|--------------|----------|---------------|
| Eksponensial | 1,240023 | Sangat Akurat |
| Hiperbolik   | 1,255099 | Sangat Akurat |
| Logistik     | 1,191897 | Sangat Akurat |

Perbedaan nilai MAPE antara ketiga model relatif kecil (berkisar 0,06%), namun secara konseptual perbedaan ini bermakna. Keunggulan model logistik bukan semata pada akurasi numerik, melainkan juga pada landasan teoritisnya yang lebih kokoh untuk kasus Surabaya. Nilai *carrying capacity*  $K = 3.863.237$  jiwa yang diperoleh dalam penelitian ini merupakan parameter penting yang menunjukkan batas maksimal populasi yang dapat ditopang oleh infrastruktur dan sumber daya Kota Surabaya. Angka ini dapat menjadi acuan bagi pemerintah kota dalam perencanaan tata ruang, penyediaan fasilitas publik, dan pengelolaan urbanisasi. Hal ini sejalan dengan rekomendasi Zahrotha dkk. (2025) yang menekankan perlunya kebijakan berbasis data kuantitatif dalam pengelolaan kota yang berkelanjutan.

Proyeksi penduduk Kota Surabaya pada tahun 2035 menggunakan model logistik menghasilkan estimasi sebesar 3.244.200 jiwa. Angka ini berada di bawah nilai *carrying capacity* ( $K$ ), yang mengindikasikan bahwa pertumbuhan populasi Surabaya masih dalam fase transisi menuju titik kejenuhan. Namun demikian, mengacu pada data BPS yang menunjukkan lonjakan signifikan pada tahun 2023 (3.009.286 jiwa), pemerintah kota perlu mewaspadai percepatan pertumbuhan yang dapat mendorong populasi mendekati batas  $K$  lebih cepat dari perkiraan. Temuan Salim (2023) yang mengkaji fenomena urbanisasi Surabaya memperkuat argumen ini, bahwa arus migrasi penduduk muda ke Surabaya berpotensi mempercepat laju pertumbuhan populasi secara signifikan. Oleh karena itu, proyeksi ini perlu diperbarui secara berkala dengan data terkini untuk memastikan akurasi dan relevansinya sebagai dasar kebijakan pembangunan kota.

## PENUTUP

Berdasarkan hasil penelitian, model eksponensial, hiperbolik, dan logistik telah berhasil dihitung untuk memproyeksikan jumlah penduduk Kota Surabaya. Model eksponensial dinyatakan dengan  $P(t) = 2.765.487^{(0.00873849)t}$  dan memiliki MAPE sebesar 1.240023%, sedangkan model hiperbolik dinyatakan dengan  $P(t) = \frac{2.765.487}{1-(0.0083676)t}$  dengan MAPE sebesar 1.255099%, serta model logistik dinyatakan dengan  $P(t) = \frac{3.863.237}{[1+(0.396946)e^{-(0.034881)t}]}$  dengan MAPE sebesar 1.191897%. Dari ketiga model, model logistik memberikan estimasi paling akurat dan tepat karena memiliki MAPE terkecil dan model yang tepat untuk proyeksi jangka panjang.

## REFERENSI

- Agustine, A. Z. D., Trysnio, L. E., & Aliefia, N. R. (2025). Dari Sakura ke Suroboyo: Sinergi Sister City dalam Upaya Pengelolaan Lingkungan yang Berkelanjutan. *Jurnal Media Akademik (JMA)*, 3(6).
- Carolin, V., & Kurniati, E. (2025). Tantangan Pembangunan Perkotaan Terhadap Urbanisasi, Kemacetan Di Jakarta: Analisis Permasalahan Dan Solusi. *Jurnal Ilmu Ekonomi*, 4(1), 252–273.
- Khairunnisa, J. (2025). Penerapan Model Eksponensial dan Model Logistik untuk Memproyeksikan Jumlah Penduduk Kabupaten Lombok Timur. 7(1), 1–12.
- Khasanah, N., & Suryani, I. (2022). Model Eksponensial dan Logistik Serta Analisis Kestabilan Model Pada Perhitungan Proyeksi Penduduk Provinsi Riau. 11(1), 22–39. <https://doi.org/10.14421/fourier.2022.111.22-39>
- Korotayev, A., & Khaltourina, D. (n.d.). *INTRODUCTION TO SOCIAL MACRODYNAMICS : Secular Cycles and Millennial Trends*.
- Kurniawan, A., Holisin, I., & Kristanti, F. (2017). Aplikasi persamaan diferensial biasa model

- eksponensial dan logistik pada pertumbuhan penduduk kota Surabaya. *MUST: Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 2(1), 129–141.
- Nuraeni, Z. (2017). Aplikasi persamaan diferensial dalam estimasi jumlah populasi. *Delta: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 5(1), 9–16.
- Nurmadhani, N., Matematika, P. S., & Madura, U. I. (2022). *PENERAPAN MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK DALAM*. 8(2).
- Pida, D. F., Aini, K. N., & Putri, C. A. (2025). Dampak urbanisasi terhadap perkembangan kota di Indonesia: Tinjauan dari aspek ekonomi pembangunan. *WISSEN: Jurnal Ilmu Sosial dan Humaniora*, 3(1), 226–238.
- Remetwa, M. K. (2025). Aplikasi Persamaan Differensial Dengan Pendekatan Model Pertumbuhan Eksponensial Untuk Memprediksi Jumlah Penduduk Kota Tual Tahun 2026–2030. *Jurnal Ilmiah Matematika (JIMAT)*, 6(1), 327–338.
- Salim, H. (2023). Fenomena urbanisasi kota surabaya (studi penambahan penduduk berusia muda). *Prosiding Seminar Nasional Ilmu Ilmu Sosial (SNIIS)*, 2, 938–946.
- Salsabila, S., Prihandono, B., & Pasaribu, M. (2024). PEMODELAN PERTUMBUHAN POPULASI KOTA SINGKAWANG. *BIMASTER: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 13(6).
- Suryani, I., & Khasanah, N. (2022). Model eksponensial dan logistik serta analisis kestabilan model pada perhitungan proyeksi penduduk Provinsi Riau. *Jurnal Fourier*, 11(1), 22–39.
- Syawal, F., Syata, I., Pathuddin, H., & Iknas, R. (2025). Penerapan Model Pertumbuhan Populasi Malthus dan Verhulst untuk Estimasi Jumlah Penduduk di Provinsi Sulawesi Selatan. *Journal of Mathematics: Theory and Applications*, 7(1), 24–33.